Anthony Kenny



INTRODUCCIÓN A FREGE



CATEDRA

colección teorema

Introducción a Frege

Colección Teorema

Anthony Kenny

Introducción a Frege

Traducción de Carmen García Trevijano

CATEDRA

TEOREMA

Título original de la obra:
Frege. An introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy

Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Depósito legal: M. 13.435/1997
I.S.B.N.: 84-376-1529-1
Printed in Spain
Impreso en Fernández Ciudad, S. L.
Catalina Suárez, 19. 28007 Madrid

Prefacio

Hace veinte años publiqué en Penguin un libro de introducción a Wittgenstein. Tuvo una amplia acogida, y la editorial Penguin me encargó que escribiese una introducción similar a Frege para el lector no especializado. Sin embargo, en aquel mismo año, 1973, apareció el primer y extenso volumen del magistral estudio de Michael Dummett *Frege, Philosophy of Language* (Londres, Duckworth, 1973). Hubiera sido prematuro publicar una obra de divulgación sobre Frege mientras la autorizada interpretación de Dummett estuviera aún incompleta. Por tanto, decidimos posponer la redacción del presente libro hasta la publicación del segundo volumen de Dummett. Lo cual no ocurrió hasta 1991.

En ese lapso de tiempo, Dummett fue publicando otras excelentes obras intermediarias. *The Interpretation of Frege's Philosophy* apareció en 1981 (Londres, Duckworth) y *Frege and Other Philosophers* vio la luz en 1991 (Oxford University Press). En 1991 apareció también el libro que originalmente había sido planeado como segundo tomo de una obra proyectada en dos volúmenes, *Frege, Philosophy of Mathematics* (Londres, Duckworth).

Cuando el esperado segundo volumen de Dummett fue publicado comencé a escribir el presente libro. La influencia de Dummett sobre mí, y sobre cualquier otro escritor de temas fregeanos, ha sido enorme, y probable-

mente ha afectado a cada una de estas páginas. Sin embargo, no me he detenido en señalar con detalle mi deuda con Dummett ni en especificar los raros casos en que, tras alguna vacilación por mi parte, me he aventurado a diferir de su interpretación. En general, he tratado de escribir el libro de manera que el lector no tenga que verse obligado a evaluar las actuales interpretaciones de Frege, ya se trate de las de Dummett o las de cualquier otro. He intentado evitar las cuestiones sujetas a controversia siempre que me ha sido posible, y cuando he tenido que tomar partido lo he hecho discretamente.

Dummett se dirige a un lector ya introducido en lógica y filosofía contemporáneas. Este libro está pensado primariamente para el lector general que puede ignorar una y otra, por lo que he procurado no asumir el menor conocimiento técnico por su parte. Creo que, de hecho, la lectura de Frege es uno de los mejores caminos para orientarse a sí mismo en el campo de la moderna filosofía analítica. Frege dio a la filosofía su actual giro lingüístico, pero su obra toca cuestiones filosóficas tan innegablemente fundamentales que los prejuicios de los que creen que si la filosofía es lingüística ha de ser trivial, quedan con ella demolidos.

Los capítulos no han sido organizados por materias, sino siguiendo la secuencia cronológica del pensamiento de Frege. Ello envuelve alguna repetición, pues los tópicos filosóficos recurren con cierta frecuencia. No obstante, y puesto que el propósito de este libro es el de prestar ayuda al lector que se sumerge en los propios escritos de Frege, la ordenación cronológica es con toda probabilidad la más eficaz para tal propósito.

ANTHONY KENNY
Michaelmas, 1993

Agradecimientos

Agradezco a la editorial Basil Blackwell su permiso para reproducir pasajes de la traducción de *Los fundamentos de la aritmética* realizada por J. L. Austin, y los extraídos de la edición a cargo de B. McGuinnes de los *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy* de Frege, traducida por varios autores.

Mi deuda es particularmente profunda con Peter Geach, que leyó atentamente el manuscrito y me advirtió sobre una serie de importantes errores que he procurado eliminar en la versión final.

ANTHONY KENNY

Abreviaturas en las referencias a las obras de Frege

Las citas están referidas a las ediciones en español de las obras de Frege. Cuando no hay traducción, nos remitimos directamente a la edición alemana original.

C *Conceptografía*, en *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*, trad. Hugo Padilla, Universidad Autónoma de México, 1972.

CO «Sobre concepto y objeto»*.

CP «Composición de pensamientos»*.

FA *Los fundamentos de la aritmética*, en *Conceptografía...*, México, UNAM, 1972**.

FC «Función y concepto»*.

* En *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, compilación, traducción e introducción de Luis M. Valdés, Madrid, Tecnos, 1997. Este volumen incluye: 1) cinco ensayos de semántica: «Sentido y referencia», «Comentarios sobre "Sentido y referencia"», «Concepto y objeto», «Función y concepto» y «¿Qué es una función?»; y 2) los tres artículos de filosofía de la lógica que Frege escribió al final de su vida y pensó editar reunidos con el título *Investigaciones lógicas:* «El pensamiento», «La negación» y «Composición de pensamientos». El compilador añade entre corchetes la paginación original de esos títulos de Frege, a la que me atengo al citarlos, igualmente entre corchetes, en el presente volumen *[N. del T.]*.

** *Los fundamentos de la aritmética* se encuentra también incluido en *Frege: escritos filosóficos*, trad. Ulises Moulines, Barcelona, Crítica, 1996.

GA *Grundgesetze der Arithmetik*, Hildesheim, G. Olms, 1962.
KS *Kleine Schriften*, compilación de I. Angelelli, Hildesheim, Olms, 1967.
N «La negación»*.
NS *Nachgelassene Schriften*, Hamburgo, F. Meiner Verlag, 1969.
P «El pensamiento»*.
QF «¿Qué es una función?»*.
SR «Sobre sentido y referencia»*.
TF «Über formale Theorien der Arithmetik» [Sobre teorías formales de la aritmética], en *Kleine Schriften* (pág. 98).

CAPÍTULO PRIMERO

Introducción biográfica a la filosofía de Frege

Gottlob Frege fue un profesor universitario alemán del siglo XIX, poco conocido de sus contemporáneos, que dedicó su vida entera a pensar, enseñar y escribir. No se interesó por los asuntos públicos, y la mayor parte de su vida transcurrió entre el aula y la biblioteca. Sus libros y artículos fueron leídos por muy pocos de sus colegas, y durante mucho tiempo, incluso después de su muerte, su influencia en filosofía se ejerció principalmente a través de los escritos de otros. En la actualidad, Frege es venerado como fundador de la moderna lógica matemática, y su puesto como filósofo de la lógica está al mismo nivel que el de Aristóteles. En filosofía de la matemática, la figura de Frege se yergue de manera sobresaliente sobre todas las demás en la historia de esta disciplina.

Frege nació en el seno de una familia luterana en Wismar, en la costa báltica de Alemania, en 1848. Su padre, fundador de una escuela de chicas, murió en 1866 antes de que él se graduara. Durante su educación y temprana carrera académica dependió económicamente de su madre, que había sucedido a su marido en la dirección de la escuela[1].

[1] Los detalles de su biografía los he extraído de la introducción de T. W. Bynum, *A Conceptual Notation and Related Articles*, Oxford University Press, 1972.

Ingresó en la Universidad de Jena en 1869, donde permaneció durante cuatro semestres antes de trasladarse a Göttingen en 1871 para estudiar filosofía, física y matemáticas durante otros cinco semestres. Aquí leyó su tesis doctoral sobre un tema de geometría y obtuvo su título de doctor por la Universidad de Göttingen en diciembre de 1873 (KS, 1-49).

Una vez graduado, Frege solicitó un puesto no remunerado de docente en la Universidad de Jena. En apoyo de su solicitud presentó un artículo, «Métodos de cálculo basados en una extensión del concepto de cantidad» (KS, 50-84), que constituía una nueva contribución al análisis matemático. El artículo fue bien acogido por sus examinadores y el puesto le fue concedido pese al hecho de que su exposición oral fuera calificada de «ni aguda ni elocuente».

Frege comenzó a enseñar como *privatdozent* en 1874 y explicó en la facultad de matemáticas de Jena durante cuarenta y cuatro años. Era un profesor claro, concienzudo y exigente, y durante algunos años tuvo que asumir la carga docente de un colega más viejo que había quedado inválido. A pesar de ello, la labor de investigación realizada durante los cinco primeros años subsiguientes a su nombramiento había de sentar las bases de su entera obra posterior y proporcionar el punto de partida para una disciplina enteramente nueva.

La carrera de Frege como matemático comenzó en un periodo excitante en la historia de la matemática. La geometría euclidiana, considerada como un sistema de verdades necesarias durante dos milenios, había perdido su carácter de única a principios del siglo XIX. Euclides había derivado los teoremas de su sistema a partir de cinco axiomas: ahora se había mostrado que uno de esos axiomas, lejos de ser una verdad necesaria, podía ser negado sin pecar de inconsistencia; la consecuencia de ello fue el surgimiento de geometrías no euclidianas basadas en otros axiomas alternativos. Había también excitantes desarrollos en teoría de números. Los números

imaginarios, tales como $\sqrt{-1}$, que en el siglo XVIII habían sido considerados como curiosidad excéntrica, resultaban eficaces para la representación del movimiento en el plano, y fueron incorporados, por tanto, junto con otros tipos más familiares de números, a una teoría general de los números complejos. El matemático dublinés Sir William Hamilton ideó un cálculo de números hipercomplejos (cuaternios) que era útil para la representación del movimiento en el plano. En Alemania, George Cantor preparaba en Halle, mientras Frege era un joven profesor, la teoría de números infinitos que vería la luz en 1883.

Muy pronto llegó Frege a la convicción de que la lujuriante expansión de las matemáticas en su tiempo estaba inadecuadamente fundamentada. Este impresionante edificio, clamaba él una y otra vez, está asentado sobre cimientos poco firmes. Los matemáticos no entienden realmente lo que están tratando, ni siquiera en el nivel más básico. El problema no se reducía a la falta de entendimiento de la verdadera naturaleza de los números imaginarios como por ejemplo $\sqrt{-1}$, o de la de los números irracionales como $\sqrt{2}$, o de la de π, o la de números fraccionarios como 2/3 o la de los negativos como por ejemplo 1; la falta de entendimiento empezaba con los números naturales, como 1, 2 y 3. Los matemáticos no podían explicar, a juicio de Frege, la naturaleza de los objetos primarios de su ciencia o la base fundamental de la disciplina que enseñan. Y resolvió dedicar su vida a remediar este defecto: establecer de manera perspicua los fundamentos lógicos y filosóficos de la aritmética. La serie de publicaciones elaborada entre sus treinta y sus sesenta años está consagrada a este objetivo.

La primera de ellas es un opúsculo aparecido en 1879 con el título de *Begriffsschrift*, que podemos traducir por *Conceptografía*. La conceptografía o escritura conceptual que da título al libro era un nuevo simbolismo diseñado

para resaltar con claridad las relaciones lógicas que oculta el lenguaje ordinario. El cálculo que este libro contiene significó un avance de primer orden en la historia de la lógica.

Desde hace ya bastantes generaciones, el currículum en lógica formal comienza por el estudio del cálculo proposicional. Este cálculo es la rama de la lógica que se ocupa de aquellas inferencias que dependen de la fuerza de la negación, la conjunción, la disyunción, etc., cuando se aplican a proposiciones tomadas en su totalidad. Su principio fundamental es que el valor de verdad (es decir, la verdad o la falsedad) de las proposiciones que contienen conectivas tales como «y», «si», «o» está determinado únicamente por los valores de verdad de las proposiciones que las componen y que están ligadas por dichas conectivas. La *Conceptografía* de Frege contiene la primera formulación sistemática del cálculo proposicional, presentado en forma axiomática de manera tal que todas las leyes de la lógica son derivadas, mediante un método especificado de inferencia, a partir de un cierto número de principios primitivos. El simbolismo de Frege, aunque elegante, es difícil de imprimir y ya no se usa; pero las operaciones que este simbolismo expresa continúan siendo fundamentales en lógica matemática.

La mayor contribución de Frege a la lógica fue su invención de la teoría de la cuantificación: un método para simbolizar y exponer rigurosamente aquellas inferencias cuya validez depende de expresiones tales como «todo», «alguno», «cualquiera», «cada», «alguno no» o «ninguno». Utilizando una notación novedosa para la cuantificación, presenta Frege en la *Conceptografía* un cálculo en el que formaliza tales inferencias (un «cálculo funcional» o «cálculo de predicados» como posteriormente fue llamado). Este cálculo sentó las bases de todos los subsiguientes desarrollos en lógica y formalizó la teoría de la inferencia de modo más riguroso y general que la silogística aristotélica, que hasta el tiem-

po de Kant había sido considerada el alfa y el omega de la lógica.

El interés que guía a Frege al redactar su *Conceptografía* no está dirigido a la lógica en sí. Su propósito no es simplemente enseñar cómo es posible utilizar la lógica de manera matemática; lo que Frege persigue es mostrar que la lógica y la matemática están mucho más estrechamente unidas entre sí de lo que hasta entonces se había pensado.

Antes de que Frege abordase esta cuestión, la naturaleza de la matemática había sido objeto de debate entre dos escuelas de pensamiento filosófico. Según Inmanuel Kant (1724-1804), nuestro conocimiento de la aritmética y la geometría depende de la intuición. Su *Crítica de la razón pura* elabora la concepción de que las verdades matemáticas son, en su terminología, a la vez sintéticas y a priori, lo cual significa que, aunque genuinamente informativas, son conocidas con anterioridad a toda experiencia. John Stuart Mill (1806-1873), por otra parte, pensaba que las verdades matemáticas son conocidas a posteriori, es decir, sobre la base de la experiencia. Su *Sistema de lógica* defiende la tesis de que las verdades matemáticas son generalizaciones empíricas vastamente aplicables y ampliamente confirmadas.

La naturaleza de la verdad matemática tiene una significación central en filosofía. Fue crucial para la cuestión en litigio entre los filósofos empiristas, que mantenían que todo nuestro conocimiento derivaba de la experiencia sensorial, y los filósofos racionalistas, que sostenían que los elementos más universales e importantes de nuestro conocimiento derivaban de alguna fuente supra-sensible. Así, Mill dice que su *Sistema* «combatió a los filósofos de la intuición en un terreno en el que hasta entonces se les había considerado intocables; y, a partir de la experiencia y la asociación, ofrece su propia explicación de ese peculiar carácter de las que llamamos verdades necesarias, que es aducido

como prueba de que la evidencia de dichas verdades ha de venir de una fuente más profunda que la experiencia»[2].

Frege se opone a Mill y concuerda con Kant en que la matemática es conocida a priori. Pero mantiene que las verdades de la aritmética no son sintéticas en absoluto, y niega que contengan información alguna que no esté implícita en la naturaleza del conocimiento mismo. A diferencia de la geometría —que, de acuerdo con Kant, se basaba en una intuición a priori— la aritmética era analítica; no era, por cierto, nada más que una rama de la lógica.

El objetivo a largo plazo de Frege era mostrar que la aritmética podía ser formalizada sin tener que recurrir a ningún tipo de nociones o axiomas no lógicos, pues estaba basada únicamente en leyes generales que son operativas en cualquier esfera del conocimiento y no requieren la menor apoyatura de hechos empíricos. En adición a su formalización y al cálculo de proposiciones y de funciones, la *Conceptografía* contenía una buena cantidad de importante trabajo preparatorio para esta reducción de la aritmética a la lógica; mas la presentación completa de la tesis de Frege hubo de esperar a la publicación de su libro *Los Fundamentos de la aritmética* en 1884.

Debido en parte a la *Conceptografía*, Frege fue ascendido al rango de profesor asalariado en 1879. La obra, sin embargo, no fue bien recibida en el mundillo lógico o matemático en general. La notación de Frege era bidimensional y tabular; lo cual se les antojó incómodo e inútil a los recensores. Varios autores compararon desfavorablemente el libro con el de George Boole, *Una investigación sobre las leyes del pensamiento*, aparecido en 1854 con una lógica organizada en fórmulas que se asemejaban bastante a las familiares ecuaciones aritméticas. Las publicaciones de Frege entre 1879 y 1884 con-

---

[2] J. S. Mill, *Autobiography*, Oxford University Press, 1971, pág. 135.

sistieron principalmente en respuestas a críticos hostiles y en explicaciones sobre el modo en que sus objetivos y métodos diferían de los de Boole.

Tal vez debido a la desfavorable acogida de su *Conceptografía*, Frege escribió *Los fundamentos de la aritmética* en un estilo muy diferente. Comparativamente, recurre rara vez a los símbolos y muestra una preocupación constante por relacionar la discusión con la obra de otros autores. La tesis de que la aritmética es derivable de la lógica —tesis que posteriormente recibió el nombre de «logicismo»— es expuesta ahora clara y detalladamente, aunque de manera bastante informal la mayoría de las veces.

Casi la mitad del libro está dedicada a atacar las ideas de los predecesores y contemporáneos de Frege, incluidos Kant y Mill. El curso de esos ataques va preparando el terreno para la posición logicista. En el cuerpo principal de la obra, Frege muestra cómo reemplazar la noción aritmética general de número por nociones lógicas tales como la noción de concepto, la noción de objeto que cae bajo un concepto, la de equivalencia entre conceptos y la noción de extensión de un concepto. Frege ofrece definiciones, en términos puramente lógicos, de los números cero y uno, y de la relación que cada número tiene con su predecesor en la serie numérica. A partir de estos elementos, juntamente con las leyes generales de la lógica, el autor ofrecía derivar la totalidad de la teoría de números.

Los fundamentos de la aritmética es una obra muy notable; pero al aparecer recibió una recepción aún más fría que la *Conceptografía*. Sólo mereció tres críticas, todas ellas hostiles, y durante casi veinte años el libro permaneció virtualmente ignorado. Frege se sintió desilusionado, aunque no desanimado para seguir trabajando sobre su gran proyecto.

En los *Fundamentos* hay dos tesis a las que Frege concede gran importancia. La primera es que cada número individual es un objeto independiente. La segunda

es que el contenido de un enunciado de asignación de un número es una aserción relativa a un concepto; así, por ejemplo, el enunciado «La Tierra tiene una luna» asigna el número 1 al concepto *luna de la Tierra.*

A primera vista estas tesis parecen estar en conflicto, pero si entendemos lo que Frege quiere decir con «concepto» y «objeto» veremos que ambas son complementarias. Al decir que un número es un objeto, el autor no está sugiriendo que un número sea algo tangible, como lo son un árbol o una mesa. Lo que hace más bien son dos cosas muy distintas. En primer lugar está negando que un número es una propiedad que pertenezca a una cosa, sea individual o colectiva. En segundo, está también negando que el número sea algo subjetivo, un elemento mental o una propiedad de un elemento mental. Los conceptos son para Frege independientes de la mente, y así no hay contradicción entre la tesis de que los números son objetivos y la tesis de que los enunciados numéricos son enunciados acerca de conceptos. Estos dos principios serán parte esencial del núcleo del pensamiento de Frege durante muchos años, mientras sus esfuerzos se encaminan a la perfección del simbolismo y a la presentación rigurosa de la tesis logicista.

Es fácil ver que la filosofía de la matemática de Frege está estrechamente ligada a su concepción de varios términos clave de la lógica y de la filosofía; y, ciertamente, con la *Conceptografía* y los *Fundamentos* no sólo fundó Frege la lógica moderna, sino que también abrió una nueva perspectiva a la filosofía de la lógica. Y lo hizo al establecer una neta distinción entre el tratamiento filosófico de la lógica y otras dos disciplinas que a menudo habían estado entremezcladas. Por una parte separó a la lógica de la psicología (con tanta frecuencia confundidas por los filósofos de tradición empirista) y, por otra, de la epistemología (con la que había sido a veces mezclada por filósofos de la tradición que arranca de Descartes).

Durante los nueve años que siguieron a la publicación de los *Fundamentos*, Frege se dedicó principalmente a su

proyecto logicista de derivar la aritmética de la lógica. Sin embargo, sus publicaciones durante este periodo se ocupan esencialmente de problemas de filosofía del lenguaje. En 1891-1892 aparecieron tres artículos: «Función y Concepto», «Sentido y Referencia» y «Concepto y Objeto». Cada uno de estos ensayos, que hoy son autoridad, presenta ideas filosóficas de importancia fundamental con brevedad y claridad asombrosas. Sin la menor duda, fueron considerados por Frege como auxiliares para el proyecto logicista, pero en la actualidad son tenidos por los escritos seminales clásicos de la moderna teoría semántica.

Uno de los más significativos desarrollos del pensamiento fregeano en aquel tiempo fue la nueva distinción que el autor introduce ahora entre *sentido* y *referencia*. Mientras otros filósofos hablaban ambiguamente del *significado* de una expresión, Frege nos invita a constatar la diferencia entre la *referencia* de una expresión (el objeto al que se refiere, como el planeta Venus es la referencia de «La estrella de la mañana») y el *sentido* de esa expresión. («La estrella de la tarde» difiere en sentido de «La estrella de la mañana», aunque, como los astrónomos descubrieron, la primera también se refiere a Venus.) La más chocante y controvertida aplicación de la distinción fregeana entre sentido y referencia es su teoría de que no son sólo las palabras aisladas las que tienen referencia, sino que también la tienen los enunciados completos. La referencia de un enunciado es su valor de verdad (esto es, lo Verdadero, o lo Falso).

El clímax de la carrera de Frege como filósofo debería haber llegado con la publicación de los volúmenes de *Grundgesetze der Arithmetik (Principios de la aritmética)*[3], en los que el autor presenta de manera formal la construcción logicista de la aritmética sobre la base de la pura lógica. Esta obra se proponía ejecutar la tarea programada en los anteriores libros sobre la filosofía de la matemática:

[3] Las páginas citadas de esta obra, no traducida al español, son las de su edición original alemana.

establecer un conjunto de axiomas que fueran con toda evidencia verdades lógicas, proponer un conjunto de reglas de inferencia de consistencia reconocida, y luego, sirviéndose de estas reglas, presentar, una por una, derivaciones de las habituales verdades aritméticas a partir de los axiomas en una versión ampliada del simbolismo de la *Conceptografía*. Sin embargo, ningún editor se comprometió a publicar el manuscrito completo; Pohle de Jena, que había publicado «Función y Concepto» como un opúsculo, accedía a publicarlo en dos volúmenes, supeditando la edición del segundo al éxito del primero. A finales de 1893 aparecía el primer volumen; la publicación del segundo fue pospuesta hasta 1903.

Los *Grundgesetze* siguen la línea principal de *Los fundamentos*. No obstante, Frege pone aquí mucho más énfasis en la noción de clase, que ahora considera esencial para la definición de la noción de número. Los números cardinales son en efecto definidos como clases de clases equivalentes, esto es, clases con el mismo número de miembros; así, el número dos es la clase de los pares, y el número tres es la clase de los tríos. Pese a las apariencias, esta definición no es circular, puesto que podemos decir qué significa que dos clases tienen el mismo número de miembros sin necesidad de utilizar la noción de número. Dos clases son equivalentes si es posible ponerlas mutuamente en correspondencia de uno-a-uno. Podemos definir el número cero en términos puramente lógicos como la clase de todas las clases equivalentes a la clase de objetos que no son idénticos consigo mismos. Podemos definir al número uno como la clase de todas las clases equivalentes a la clase cuyo único miembro es cero. Para pasar de la definición de cero y uno a la definición de los otros números naturales, Frege hace uso de las definiciones de «sucesor» y de otras relaciones matemáticas en el seno de la serie numérica que ya había desarrollado en la *Conceptografía*. El tratamiento de los números negativos, fraccionarios, irracionales y complejos quedó pospuesto para el segun-

do volumen. El majestuoso proyecto de Frege quedó abortado antes de ser completado. El primer volumen fue recibido en general con la fría indiferencia que había acompañado a sus anteriores obras. A resultas de ello, la publicación del segundo volumen quedó congelada durante una década y vio finalmente la luz a expensas del propio autor. No obstante, la publicación del primer volumen tuvo como consecuencia la promoción de Frege a la cátedra en Jena y una sustancial ayuda de investigación financiada por la fundación de la compañía fotográfica Zeiss. Igualmente dio lugar a una fructífera controversia con el lógico italiano Giuseppe Peano, que modificó su propia y recién publicada axiomatización de la aritmética para tomar en cuenta las críticas de Frege. A través de Peano, la obra de Frege llegó finalmente a oídos del primero de sus lectores ingleses, Bertrand Russell, a la sazón un joven miembro del Trinity College en Cambridge.

Entre la aparición de los dos volúmenes de los *Grundgesetze,* Frege empleó mucho tiempo en publicar amargos y sarcásticos ataques de intensidad creciente contra los estudiosos que habían malinterpretado sus propias publicaciones. El más fértil de ellos fue su hostil recensión de la *Filosofía de la aritmética* del filósofo alemán Edmund Husserl; la crítica fregeana, que en buena parte fue asumida por Husserl, llevó a éste a abandonar el psicologismo que anteriormente había defendido y a convertirse, aliado con Frege, en uno de sus más severos críticos.

Mientras el segundo volumen estaba en prensa, en 1902, Frege recibió una carta de Russell en la que le advertía que el quinto de los axiomas iniciales de los *Grundgesetze* tornaba inconsistente al sistema entero. Este axioma establece en efecto que si todo F es G, y todo G es F, entonces la clase de los Fs es idéntica a la clase de los Gs, y viceversa: era el axioma que, en palabras de Frege, permitía «la transición de un concepto a su extensión», transición que era esencial si había que

establecer que los números eran objetos lógicos. Con este axioma, el sistema de Frege permitía la formación de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. Pero la formación de una clase tal, advertía Russell, conduce a una paradoja: si es miembro de sí misma, entonces no es miembro de sí misma; si no es miembro de sí misma, entonces es miembro de sí misma. Un sistema que conduzca a semejante paradoja no puede ser lógicamente correcto.

No sin razón, Frege cayó en un amargo abatimiento ante este descubrimiento, aunque se afanó en recomponer su sistema debilitando el axioma responsable. La paradoja y su pretendida solución fueron descritas en un apéndice al segundo volumen de los *Grundgesetze* cuando apareció en 1903. El sistema de Frege revisado resultó a su vez ser inconsistente, aunque Frege siguió creyendo en él durante varios años. Después de su jubilación en Jena, en 1918, parece haber abandonado finalmente su creencia de que la aritmética era derivable de la lógica, y haber retornado a la concepción kantiana de que la aritmética, al igual que la geometría, es sintética a priori.

En los últimos años de su vida, entre 1918 y su muerte, Frege intentó escribir un tratado completo de lógica filosófica. Todo lo que pudo completar fue una serie de artículos *(Investigaciones lógicas*, 1919-1923) en los que volvía a la relación entre lógica y psicología filosófica, o filosofía de la mente, y discutía la naturaleza del pensamiento y la inferencia.

Gran parte de lo escrito por Frege durante sus últimos años sobre lógica filosófica estaba sin publicar cuando murió. Frege y su esposa Margaret tuvieron varios hijos y todos ellos murieron jóvenes; poco tiempo antes de la muerte de ella, en 1905, adoptaron un hijo, Alfred, que habría de ser ingeniero. Cuando Frege redactó su testamento en enero de 1925, dejó sus artículos no publicados a Alfred con la siguiente nota:

Querido Alfred,

No desdeñes las piezas que he escrito. Aunque no todo sea oro, hay oro en ellas. Creo que hay aquí cosas que algún día podrán tener un valor mucho mayor que el que ahora tienen. Cuídate de que nada se pierda.

Tu amante padre.

Es una buena parte de mí lo que te lego con esto[4].

Seis meses más tarde moría Frege sin saber que estaba destinado a ser considerado el fundador del movimiento filósofico más influyente del siglo xx. Su muerte provocó escasa resonancia en el mundo académico.

---

[4] La mayoría de los escritos póstumos fueron publicados en alemán en 1969 y en inglés en 1979.

Capítulo II

Conceptografía, I

En 1879 publicó Frege un pequeño libro titulado *Begriffsschrift*, traducido al castellano como *Conceptografía*. Este libro marcó época en la historia de la lógica, pues en el espacio de su breve extensión —poco más de cien páginas— establece un nuevo cálculo que ocupa un lugar permanente en el corazón de la moderna lógica. En la exposición de este cálculo, el autor introduce asimismo una serie de profundas observaciones sobre la naturaleza de la lógica, de la prueba y del lenguaje que merecen un estudio detallado.

Frege presentó su cálculo en un simbolismo inventado para tal fin, la escritura de conceptos que dio título a la obra. La construcción de este simbolismo estaba originalmente motivada por su deseo de establecer con rigor la verdadera naturaleza de la aritmética. Las leyes de la lógica operan en cualquier esfera del conocimiento. Ahora bien, ¿descansan las pruebas aritméticas puramente en estas leyes lógicas, o necesitan el apoyo de hechos empíricos? Para responder a esta cuestión, habría que ver «hasta dónde se podría llegar en aritmética sólo con deducciones lógicas, apoyándose únicamente en las leyes del pensamiento».

Al aplicarse a esta tarea, Frege encontró que el lenguaje ordinario no era lo suficientemente preciso para

sus propósitos. Y en consecuencia inventó la escritura conceptual. Su objetivo al hacerlo era limpiar al lenguaje de todos los rasgos que son irrelevantes para la validez de la prueba, puesto que ésta era el objeto de su estudio. Los elementos de los enunciados que son esenciales para la inferencia constituyen, en la terminología de Frege, el «contenido conceptual»; he aquí la razón de que su nueva notación, diseñada para simbolizar esto y solamente esto, fuera llamada «escritura conceptual».

Cuando Frege escribía, la aritmética, la geometría y la química poseían ya su propia y especial notación simbólica. Lo que había de especial en la escritura conceptual consistía en ser una notación singular aplicable en cualquier esfera que hiciese uso de pruebas rigurosas. En algunos campos —en aritmética tal vez— esta nueva notación podría quizá bastar por sí misma para capturar todo lo que fuera necesario para verificar la validez de una prueba. En otros campos —digamos, geometría o cinemática— sería necesario un simbolismo suplementario que expresase las propiedades y relaciones específicas envueltas. A medida que la física progresa se requerirán sin duda nuevos sistemas simbólicos para capturar nuevos descubrimientos; pero las leyes de la lógica operan en física como en cualquier otra parte, y para codificar esas leyes no tenemos que esperar a alguna fecha mítica en que todas las leyes de la naturaleza hayan sido descubiertas.

Frege no se hacía la ilusión de que su escritura conceptual fuera un lenguaje nuevo y perfecto que habría de descartar al lenguaje natural por imperfecto. Al contrario, la relación entre su escritura conceptual y el lenguaje ordinario era para él como la relación que hay entre el microscopio y el ojo. El ojo es claramente superior al microscopio: puede aplicarse de muchos modos y sobre muchos objetos sobre los que el microscopio es inútil. Sólo cuando se requiere una alta resolución para fines particulares es cuando el microscopio resulta superior al ojo desnudo. Similarmente, la escritura conceptual está diseñada para la tarea especial de resaltar nítidamen-

te aquellos elementos que son esenciales para la validez de la prueba. Para este fin particular el lenguaje ordinario es demasiado exuberante, y las formas de expresión de los lenguajes naturales pueden ser engañosas. Frege esperaba que su notación conceptual ayudara a desenmascarar las ilusiones generadas por idiomas ambiguos. En este sentido, tal notación podría ayudar a la filosofía a «romper el dominio de la palabra sobre la mente humana» (C, Introd., pág. 10).

Cuando Frege dice que el lenguaje ordinario es engañoso, no quiere decir con ello que los hablantes ordinarios estén inmersos en el error en su uso cotidiano del lenguaje, sino que los gramáticos analizan el lenguaje de maneras que son falaces para los fines lógicos. Un ejemplo es la distinción entre el sujeto y el predicado de una proposición. Considérense los dos siguientes enunciados sobre la Batalla de Hastings:

William derrotó a Harold.
Harold fue derrotado por William.

En la escuela aprendemos, o solemos aprender, que estas dos proposiciones son bastante diferentes entre sí, que tienen diferentes sujetos y diferentes predicados. El sujeto de la primera es «William» y el predicado (que podría ser analizado a su vez en verbo activo y objeto) es «derrotó a Harold»; el sujeto de la segunda es «Harold» y el predicado (que podría ser analizado también en verbo pasivo y agente) es «fue derrotado por William».

Hay ciertamente diferencias de importancia lingüística entre las construcciones activa y pasiva. La elección entre una y otra dependerá, dice Frege, del contexto de la «interacción entre el que habla y el que escucha»: el orador puede recurrir a una u otra forma por razones de énfasis, o para ligar la frase con lo que ha dicho antes. Pero las diferencias entre las dos proposiciones no tienen la menor influencia en lo que de ellas se sigue lógicamente. Todo lo que se sigue de la primera, se sigue

también de la segunda, y viceversa. Por tanto, dice Frege, una y otra proposición no difieren en contenido conceptual.

«La distinción entre sujeto y predicado», escribió Frege en la *Conceptografía*, «no tiene lugar en mi modo de representar un juicio» (C, § 3). En su obra posterior, Frege vuelve a usar el término «predicado» empleándolo en un sentido diferente del que acaba de ser ilustrado. Podemos usar la expresión «sujeto gramatical» y «predicado gramatical» para indicar la distinción que Frege introdujo en su escritura conceptual, y utilizar «predicado» *tout court* en el sentido en el que él mismo lo utilizó en sus escritos posteriores.

En la *Conceptografía*, Frege reemplaza las nociones de *sujeto gramatical* y *predicado gramatical* por los conceptos lógicos de *argumento* y *función* (C, Introd., página 10). Supóngase que tomamos nuestra proposición

William derrotó a Harold

y que en lugar de la palabra «Harold» ponemos la palabra «Canuto». Es claro que esto altera el contenido de la proposición, y que, ciertamente, torna una proposición verdadera en una proposición falsa. Podemos concebir al enunciado como formado por un componente constante «William derrotó a...» y un símbolo reemplazable «Harold». El nombre «Harold» es reemplazable por otros símbolos similares, por nombres que designen a otras personas del mismo modo que «Harold» nombra a Harold. Concebido el enunciado de este modo, Frege llamará función al primer componente fijo, y argumento de la función al segundo componente. El enunciado «William derrotó a Harold» es el resultado de completar la expresión «William derrotó a...» con el nombre «Harold», y el enunciado «William derrotó a Canuto» es resultado de completar la misma expresión con el nombre «Canuto». Es decir, en la terminología sugerida en la *Conceptografía*, el enunciado «William derrotó a Harold» es el valor de la función

«William derrotó a...» para el argumento «Harold», y «William derrotó a Canuto» es el valor de la misma función para el argumento «Canuto».

Al igual que ocurre con la distinción entre sujeto y predicado, la distinción entre función y argumento no afecta al contenido conceptual. Así como dos proposiciones con diferentes sujetos y predicados pueden tener el mismo contenido conceptual, igualmente puede ser el caso con dos proposiciones que sean los valores de diferentes funciones y diferentes argumentos. Un enunciado aislado puede ciertamente ser analizado en función y argumento en más de una forma, mientras retiene el mismo contenido conceptual. Por ejemplo, el enunciado

William derrotó a Harold

no es sólo el valor de la función «William derrotó a...» para el argumento «Harold»; también es el valor de la función «... derrotó a Harold» para el argumento «William».

Las expresiones «William derrotó a...» y «... derrotó a Harold» necesitan cada una de ellas un nombre singular para tornarse en enunciados; son, en terminología de Frege, funciones que toman un solo argumento. Pero la expresión «... derrotó a...» necesita ser suplementada en cada uno de los extremos para convertirse en un enunciado: es una función que toma dos argumentos. «William derrotó a Harold» es el valor de esta función para los argumentos «William» y «Harold». Es evidente que el orden en que los argumentos ocurren introduce una gran diferencia; por tanto, una escritura conceptual tendrá que especificar cómo representar el orden de sus ocurrencias (C, § 9).

Consideremos ahora la proposición un tanto especial que Frege nos presenta:

Catón mató a Catón.

Podemos considerar tal proposición como una función del argumento «Catón» de varios modos. Hay diferencia

si pensamos en «Catón» como un símbolo reemplazable por otro argumento en el primero o en el segundo de los dos lugares. En el primer caso «... mató a Catón» es la función; en el segundo, la función es «Catón mató a...»; hemos de encontrar, sin embargo, algún modo de indicar que los dos huecos han de ser llenados con el mismo nombre, digamos poniendo en cada uno de los lugares la misma letra a título de reserva de plaza, así: «X mató a X». Esta última expresión será equivalente a la expresión «... se mató a sí mismo» (o, en el caso de un argumento tal como «Cleopatra», equivalente a «... se mató a sí misma»).

Frege ofrece la siguiente definición general de «función» y «argumento»:

> Si en una expresión... aparece un símbolo simple o compuesto en uno o más lugares, y si lo pensamos como reemplazable en todos o en algunos de estos lugares por algo distinto, pero siempre por lo mismo, entonces a la parte de la expresión que se muestra invariante bajo tales reemplazos la llamamos función; y la parte reemplazable, su argumento (C, págs. 28-29).

Esta definición puede ser aplicada no sólo al análisis de proposiciones, como en nuestros anteriores ejemplos, sino también al análisis de expresiones de otros tipos, por ejemplo de nombres complejos o descripciones. «Padre de Isaac», por ejemplo, una descripción de Abrahán, puede ser considerada como el valor de la función «Padre de...» para el argumento «Isaac».

En la *Conceptografía* resulta claro que funciones, argumentos y sus valores son todos ellos trozos de lenguaje: nombres, simples o compuestos, y enunciados, con o sin lagunas. La definición ofrecida por Frege se refiere explícitamente a las expresiones, no a las cosas fuera del lenguaje que dan contenido o significado a las expresiones. Sus ejemplos de argumentos y de funciones son introducidos en general rodeados de comillas, lo que

naturalmente indica que es de elementos lingüísticos de lo que se está hablando.

Sin embargo, al utilizar los términos «función» y «argumento», Frege está haciendo de ellos un uso matemático; y el análisis del uso que hacen los matemáticos muestra que las funciones y los argumentos no son para ellos elementos lingüísticos, sino algo diferente. En la ecuación

$$y = x\,(x-4)$$

un matemático diría que y indica el valor de una cierta función y que x indica el argumento de la función. El valor de la función en cuestión, para el argumento 8, es 32. Pero aquí argumento y valor no son símbolos: son números, no numerales. En sus obras posteriores Frege se mostró mucho más interesado en aplicar las nociones de *función* y *argumento* no tanto a los elementos lingüísticos en sí como a los elementos con los que el lenguaje suele expresarse y hablar de las cosas. Más adelante volveremos sobre este interés generalizado de Frege. Aquí, en la *Conceptografía*, ese interés es sólo latente: su principal cometido es aplicar las referidas nociones a la construcción de enunciados en lenguaje natural y en notación simbólica[1].

Para evitar la confusión con las funciones y argumen-

---

[1] En la *Conceptografía,* Frege no se cuida tanto como lo haría después de distinguir sistemáticamente entre los signos y lo que éstos significaban —entre, por ejemplo, el nombre «Guillermo» y la persona Guillermo el Conquistador al que el nombre nombra. Cuando habla de funciones abandona ocasionalmente su propia concepción de que son trozos de lenguaje y las considera como algo subyacente al lenguaje, por ejemplo, conceptos. Así, al ofrecer el tercer posible análisis de la proposición "Catón mató a Catón", dice Frege, «si imaginamos a "Catón" como reemplazable en ambas ocurrencias, entonces "matarse a uno mismo" es la función». Y esto resulta confuso. El uso de las comillas en "matarse a uno mismo" induce a creer que Frege está hablando consistentemente de una expresión lingüística; pero "matarse a uno mismo" no es la misma expresión que "X mató a X", incluso aunque uno quisiera decir que una y otra son expresiones del mismo concepto.

tos que más tarde acapararían la atención primordial de Frege, podemos llamar «funciones lingüísticas» y «argumentos lingüísticos» a las funciones de la *Conceptografía*[2]. Así, en el presente capítulo, siempre que utilicemos la palabra «función» estaremos hablando de «función lingüística». Cuando en capítulos posteriores desee hablar sobre funciones lingüísticas, las identificaré explícitamente como tales.

En proposiciones simples, la distinción entre una función y su argumento es irrelevante para el contenido conceptual, al igual que lo era la distinción entre sujeto y predicado. ¿En qué sentido entonces la dicotomía función/argumento es lógicamente más apropiada que la distinción sujeto/predicado? La respuesta está en que la primera proporciona un método más flexible de detectar similaridades lógicamente relevantes entre enunciados distintos. El análisis en sujeto-predicado es suficiente para señalar la similaridad entre «César conquistó la Galia» y «César derrotó a Pompeyo», pero es ciego para la similaridad entre «César conquistó la Galia» y «Pompeyo evitó la Galia». La cuestión cobra importancia lógica cuando nos ocupamos de enunciados en los que, en lugar de nombres propios como «César» o «Galia», ocurren expresiones que contienen palabras como «todo» o «alguno»: expresiones tales como «todos los romanos» o «alguna provincia». Una vez que introducimos expresiones de ese tipo, la distinción entre función y argumento se torna, de hecho, relevante para el contenido conceptual. Algo más adelante (véase pág. 42) volveremos sobre esta cuestión.

En los siglos que precedieron a Frege, la parte más importante de la lógica era el estudio de la validez de inferencias que contenían enunciados que empezaban por «todo», «ninguno» y «alguno». Considérense las dos inferencias siguientes:

---

[2] En esto sigo a Geach, en G. E. M. Anscombe y P. T. Geach, *Three Philosophers*, pág. 143.

(1) Todos los griegos son europeos.
Algunos griegos son varones.
Por tanto, algunos europeos son varones.

y

(2) Todas las vacas son mamíferos.
Algunos mamíferos son cuadrúpedos.
Por tanto, todas las vacas son cuadrúpedos.

Estas dos inferencias tienen mucho en común una con otra. Las dos extraen una conclusión a partir de un par de premisas. En cada inferencia, la palabra clave que ocupa el lugar del sujeto gramatical de la conclusión aparece en una de las premisas, y la palabra clave que ocupa el lugar del predicado gramatical de la conclusión aparece en la otra. Las inferencias que exhiben esta característica son llamadas «silogismos» por los lógicos, y la rama de la lógica que estudia la validez de inferencias de este tipo, que fue inaugurada por Aristóteles, es llamada «silogística».

Una inferencia válida es una inferencia de una forma tal que jamás podrá llevar de premisas verdaderas a una conclusión falsa. De las dos inferencias recién expuestas, la primera es válida y la segunda inválida. Es cierto que en cada uno de los casos dados las premisas son verdaderas y la conclusión también lo es. No es posible desautorizar a la segunda sobre la base de que los enunciados que la forman sean falsos. Lo que sí cabe desautorizar es el «Por tanto»: la conclusión puede ser verdadera, pero no se sigue de las premisas.

Podemos explicitar mejor esto construyendo una inferencia paralela que conduzca de premisas verdaderas a una conclusión falsa. Por ejemplo,

(3) Todas las ballenas son mamíferos.
Algunos mamíferos son animales terrestres.
Por tanto, todas las ballenas son animales terrestres.

Esta inferencia es de la misma forma que la inferencia (2), como puede mostrarse exhibiendo la estructura de la inferencia mediante letras esquemáticas:

(4) Todos los As son Bs.
Algunos Bs son Cs.
Por tanto, todos los As son Cs.

Puesto que la inferencia (3) lleva de premisas verdaderas a una conclusión falsa, podemos ver que la forma del argumento (4) no es fiable. De aquí que la inferencia (2), pese a que su conclusión es de hecho verdadera, no sea una inferencia válida.

Un modo de definir a la lógica es decir que es una disciplina que separa las buenas inferencias de las malas. La lógica ofrecía antes de Frege un complicado conjunto de reglas que separaban los buenos silogismos de los malos silogismos. No es ocasión de detenerse aquí en dar ejemplos de esas reglas; baste decir que eran suficientes para decidir que la inferencia (1) es una inferencia válida, y que la (2) es una inferencia inválida.

La debilidad de la silogística estaba en que no podía ocuparse de inferencias en las cuales ocurrían palabras como «todo» o «alguno» (o «cada» y «cualquiera») no en el lugar del sujeto, sino en alguna parte del predicado gramatical. Las reglas no le permitirían a uno determinar, por ejemplo, la validez de inferencias que contuvieran premisas tales como «todo escolar sabe algunas fechas» o «algunas personas odian a todos los policías» en casos en los que la inferencia descansara en la palabra «algunas» en la primera, o en la palabra «todos» en la segunda proposición. Frege mostró en su *Conceptografía* el modo de superar esta dificultad.

El primer paso consistió en introducir una nueva notación que capturase el tipo de generalidad expresada por una palabra tal como «todo» con independencia del lugar en que ocurriera en la proposición. Supóngase que tomamos el enunciado «Sócrates es mortal». Podemos

analizar tal enunciado en argumento y función, siendo «Sócrates» el argumento y «... es mortal» la función. Si «Sócrates es mortal» es un enunciado verdadero, podemos decir que la función es verdadera[3] para el argumento «Sócrates». Frege introdujo un símbolo para indicar que una cierta función es verdadera con independencia del argumento que se tome. El simbolismo real que presentó no es ya utilizado por los lógicos; recurriendo en su lugar a uno equivalente más moderno podemos escribir

(x) (*x* es mortal).

«*(x)*» es el signo de la generalidad, y la expresión entera puede ser leída: «Para todo *x*, *x* es mortal», lo cual quiere decir que sea cual sea el nombre que se tome como argumento de la función «... es mortal», la función es verdadera. Por razones de simplicidad en la exposición, restrinjamos por ahora nuestra atención a nombres de seres humanos. Con tal restricción, el enunciado «Para todo *x*, *x* es mortal» será equivalente, en contenido conceptual, al enunciado que en lenguaje ordinario es la generalización de «Sócrates es mortal», a saber: «Todo el mundo es mortal».

Similarmente, si tomamos un enunciado tal como «Juan tiene relación con Juana», podemos generalizarlo de acuerdo con los varios modos en los que, según hemos visto, es posible analizar un enunciado en función y argumento. Así, «*(x)* (*x* tiene relación con Juana)» es equivalente a «Todo el mundo tiene relación con Juana», y «*(y)* (Juan tiene relación con *y*)» es equivalente a «Juan tiene relación con todo el mundo». Si analizamos el enunciado mediante la función binaria «... tiene relación con...» necesitaremos dos símbolos de generalidad si queremos generalizar los dos argumentos. Así, tendríamos que escribir «*(x)* *(y)* (*x* tiene relación con *y*)», que se lee «Para

[3] Así es como traduzco la expresión alemana correspondiente a «es un hecho» de la traducción de Geach y Bynum.

todo *x* y para todo *y*, *x* tiene relación con *y*», que es equivalente a «todo el mundo tiene relación con todo el mundo». El hecho de que su notación le permitiera dar así expresión uniforme a la generalidad cuantas veces y en cualquier lugar de la proposición en que apareciese, fue lo que principalmente permitió a Frege realizar tan gran avance respecto a la silogística tradicional.

Frege no introdujo ningún signo especial que correspondiese a la palabra «algunos» en una proposición tal como «algunos romanos fueron cobardes». Desde hacía largo tiempo los lógicos habían aceptado que esta oración era equivalente a «no todos los romanos fueron no cobardes», y Frege hizo uso de esta relación entre «algunos» y «no todos... no» para codificar proposiciones que contuviesen la palabra «alguno». Pero esta codificación necesita de un símbolo que corresponda a «no».

Frege introdujo el signo de negación, un signo que anexionado a un enunciado «expresa la circunstancia de que el contenido [del enunciado] no tiene lugar» (C, § 7). Al igual que con los otros, el símbolo particular que Frege introdujo ha caído en desuso, pero podemos utilizar uno de sus equivalentes modernos, el signo «¬». Utilizando este símbolo, escribimos la negación de «Sócrates es mortal» como «¬(Sócrates es mortal)», que puede ser leído como «No es el caso de que Sócrates sea mortal». (Ello es equivalente a «Sócrates no es mortal»; pero en estrecho paralelo con su rechazo de la distinción gramatical sujeto-predicado, corre la preferencia de Frege por adjuntar el signo de negación no al predicado gramatical de una oración, sino a la oración en su totalidad. Más adelante consideraremos las ventajas de este método de simbolización.)

Al igual que la oración original «Sócrates es mortal», la oración que constituye su negación puede ser analizada en argumento y función; por ejemplo, «¬(Sócrates es mortal)» es el valor de la función «¬(... es mortal)» para el argumento «Sócrates». Como antes hicimos, podemos adosar el signo de

generalidad a esta función y obtener el enunciado «$(x)\neg(x$ es mortal)», que puede ser leído como «Para todo x, no es el caso que x sea mortal», y esto es equivalente en contenido conceptual a la proposición del lenguaje natural «Todo el mundo no es mortal» interpretada en el sentido de «Nadie es mortal».

Sin embargo, la proposición del lenguaje ordinario puede ser tomada de diversas maneras. Cabe pensar que «Todo el mundo no es mortal» tiene la misma construcción que «Todo lo que brilla no es oro», en cuyo caso significaría lo mismo que «No todo el mundo es mortal». Y ello se traduciría de modo diferente en la escritura conceptual de Frege como «$\neg(x)(x$ es mortal)», que significa que no es el caso de que para todo x, x sea mortal. Aquí tenemos un ejemplo de las razones que asistían a Frege para creer que su simbolismo era más preciso que el lenguaje ordinario, y que con él podíamos eliminar la ambigüedad de proposiciones que en el lenguaje común podrían ser interpretadas de varios modos (C, §§ 11-12).

La diferencia, que es oscura en el lenguaje ordinario y queda clarificada por la escritura conceptual, es llamada por Frege una diferencia de *alcance*. En «$\neg(x)(x$ es mortal)», el signo de negación está fuera del alcance del signo de generalización: la negación no está generalizada. En «$(x)\neg(x$ es mortal)» el signo de negación está dentro del alcance del signo de la generalización, y la negación está generalizada (C, § 12). Se trata aquí por tanto de la distinción entre la negación de una generalización y la generalización de una negación.

La expresión «alguno» puede ahora ser definida en términos de negación y generalización. «Alguno es mortal» puede ser considerado como equivalente a «No es el caso de que todo el mundo no sea mortal», o, en nuestra actualización de la escritura conceptual de Frege, «$\neg(x)\neg(x$ es mortal)».

Hasta ahora, y por razones de exposición, me he limitado a reemplazar las x en la escritura conceptual fregeana

por nombres de seres humanos. El propio Frege no se impuso tal restricción; para él todos los objetos de cualquier tipo eran nombrables —los numerales, por ejemplo, son nombres de números— y los lugares de los argumentos en su escritura conceptual pueden ser completados con el nombre de una cosa cualquiera. En consecuencia «*(x)(x* es mortal)» debe leerse realmente no como «Todo el mundo es mortal», sino como «Toda cosa es mortal» —proposición que no es verdadera, porque, por ejemplo, el número diez no es mortal.

El simbolismo de Frege nos permite construir enunciados sobre la existencia de cosas de tipos particulares. Utilizamos la misma notación que la hasta ahora empleada para introducir enunciados que contengan la expresión «alguno». Frege observa que «$\neg(x)\neg(x$ es una casa)» es equivalente a «hay casas», supuesto que se entienda este enunciado en el sentido de cubrir el caso en el que sólo hubiera una casa y ninguna más (C, § 12 n.). Aunque Frege no lo hizo, es posible introducir un único símbolo para abreviar la expresión «$\neg(x)\neg$», y este símbolo sería por tanto equivalente a «alguno». Los símbolos así equivalentes a «todo» y «alguno» son ahora llamados por los lógicos «cuantificadores», y la rama de la lógica que se ocupa de su uso en las inferencias recibe el nombre de teoría de la cuantificación.

Frege fue el primero que sistematizó totalmente la teoría de la cuantificación. Hemos visto que los lógicos anteriores a Frege usaban letras esquemáticas para exponer la estructura de las proposiciones que formaban los silogismos. Frege adoptó y amplió su uso. Para indicar una función del argumento X sin especificar a éste, Frege escribe en la *Conceptografía* una letra griega adosada a una «X» entre paréntesis. Podemos decir en general que afirmar que $\Phi(X)$ es equivalente a afirmar que X tiene la propiedad Φ. Para indicar, sin especificarla, una función de dos argumentos X e Y, escribimos $\Psi(X, Y)$, donde los lugares de X e Y dentro del paréntesis representan los lugares ocupados por X e Y en la función. Así,

afirmar que $\Psi(X, Y)$, viene a ser lo mismo que afirmar que X tiene la relación Ψ con Y[4].

En este punto introduce Frege una breve pero importante observación, aunque su importancia no es aparente en una primera lectura. Frege dice que el símbolo «Φ» ocurre en un lugar particular en la expresión «$\Phi(X)$», y puesto que cabe imaginar que ese símbolo puede ser reemplazado por cualquier otro símbolo —por ejemplo «Ψ»— con vistas a expresar diferentes funciones del argumento X, *podemos considerar a* $\Phi(X)$ *como una función del argumento* Φ. Obsérvese que Frege no está diciendo que podamos, si queremos, considerar a «X» como la función y a «Φ» como el argumento en «$\Phi(X)$» (ello privaría de sentido a la distinción que tan cuidadosamente había elaborado). Lo que en realidad está haciendo es pasar a un nivel distinto de análisis para decir que, así como en el nivel básico «Φ» es una función del argumento «X», del mismo modo si, abandonando la consideración de la relación entre una parte y otra del enunciado, pasamos a considerar la relación que hay entre las partes y el enunciado total, podemos decir que el enunciado completo es una función de la función que está contenida en él. A una función de este tipo, una función de otra función, podría llamársela con propiedad función de segundo nivel.

A primera vista esto resulta enigmático. Cuando Frege introdujo la noción, definió a la función como parte de

---

4 En la exposición de Frege de este punto (C, págs. 30-31) hay cierta confusión, puesto que «Φ (PHI)» pretende ser una variable reemplazable por una función lingüística, tal como «... es mortal». Hablar, por tanto, de «tener la propiedad Φ» envuelve una confusión entre un signo y lo que éste significa. Cuando afirmamos que Sócrates es mortal, no afirmamos que tiene la propiedad «... es mortal», sino que tiene la propiedad de la mortalidad. En su obra posterior, Frege iba a tratar los problemas inherentes a este análisis. Otra cuestión distinta es que Frege dice que «$\Psi(A,B)$» es traducible como «B está en la relación Ψ con A», cambiando el orden de los lugares de los argumentos. Posteriormente abandonó esta confusa práctica.

una expresión. Pero «Φ*(X)*» no corresponde a una parte, sino a una expresión entera, un enunciado completo. La respuesta al enigma debe estar en que Frege piensa que es posible suplementar «Φ*(X)*» para construir un todo más amplio, del mismo modo que «Φ» es suplementado por «*X*» para construir el enunciado completo «Φ*(X)*». Para mayor claridad, examinemos lo que dice Frege en el momento de unificar su terminología de argumento y función con su método de simbolizar la generalidad.

Frege escribió:

> Aquí convendría estar avisado de un ilusorio engaño al que fácilmente conduce el uso del lenguaje. Si se comparan las dos proposiciones:
>
> «El número 20 es representable como la suma de cuatro números cuadrados.»

y

> «Todo número entero positivo es representable como la suma de cuatro números cuadrados», entonces parece posible que concibamos a «ser representable como la suma de cuatro números cuadrados» como una función que tiene en primer lugar por argumento «el número 20» y en segundo lugar «todo entero positivo». Lo erróneo de esta concepción se advierte observando que «el número 20» y «todo entero positivo» no son conceptos del mismo rango (C, pág. 29).

Cuando procede a explicar lo que quiere significar al decir que dos expresiones difieren en rango, Frege dice que mientras que «el número 20» comporta una idea independiente, la expresión «todo entero positivo» sólo adquiere sentido en el contexto de una proposición. Si función y argumento están completamente determinados, el modo en que la proposición sea analizada en argumento y función es irrelevante para su contenido conceptual. Pero no ocurre así si el argumento está indeterminado. Si se traduce a términos de función y ar-

gumento, la proposición «Todo entero positivo puede ser representado como la suma de cuatro cuadrados» es equivalente a «cualquiera que sea el nombre del entero positivo que tomemos como argumento de la función "... es representable como la suma de cuatro cuadrados", la proposición resultante es siempre verdadera»[5]. En tal caso, dice Frege, la distinción entre argumento y función es relevante para el contenido.

La justificación de esta observación resulta clara si inspeccionamos la representación de esta proposición en la escritura conceptual del propio Frege. Por razones de simplicidad, supóngase que estamos hablando simplemente del universo de los enteros positivos. Con respecto a ese universo, la fórmula fregeana «$(x)\Phi(x)$», tomando a «Φ» como abreviatura de «puede ser representado como la suma de cuatro cuadrados», corresponde a la proposición «Todo entero positivo puede ser representado como la suma de cuatro cuadrados». Pero esta fórmula puede ser dividida en argumento y función solamente de un modo. El primer símbolo «(x)» no es un argumento, sino un signo de generalidad. La «x» en el segundo par de paréntesis no es un argumento, sino una variable, esto es, un símbolo que muestra el punto en el que un argumento puede ser introducido. El único símbolo susceptible de ser tenido por un argumento es el símbolo de función «Φ». Así, la proposición completa puede ser considerada por tanto como el valor de la función «(x) $(...x)$» para el argumento «Φ». Por ser la función (x) $(...x)$ una función de función, es decir, una función que toma como argumento a otra función, será una función de segundo nivel.

---

[5] En este punto parafraseo a Frege para hacer consistente lo que dice con la teoría de las funciones lingüísticas presentada en la *Conceptografía*. Su propia formulación: «Cualquiera que sea el arbitrario entero positivo que se tome como argumento de "ser representable como la suma de cuatro cuadrados" 'la proposición sigue siendo siempre verdadera» (C, pág. 29), envuelve, en el contexto de la teoría establecida en la *Conceptografía*, una confusión entre signos y cosas significadas.

En la escritura conceptual de Frege, así como en nuestra actualización de ella, la diferencia de rango entre una expresión tal como «el número 20» y «todo entero positivo» está reflejada por una diferencia en el símbolo utilizado en cada una de ellas. Lo que Frege llama un argumento determinado será representado en nuestra versión de su simbología por una letra mayúscula cursiva (por ejemplo, *X*); y lo que él llama un argumento indeterminado lo será por una variable letra minúscula cursiva (por ejemplo, la «*x*» que aparece junto al cuantificador y en el signo que indica el lugar del argumento de la función situado dentro del alcance del cuantificador)[6].

Ahora puede verse cómo responder a la cuestión: ¿Por qué pensaba Frege que cabía considerar a «$\Phi(X)$» como una función de «Φ» pese al hecho de que «$\Phi(X)$» es completa y una función es algo incompleto? Una función de primer nivel, tal como «... es mortal», es incompleta. Pero puede ser completada de dos modos diferentes: insertando un argumento en el lugar que le había sido reservado, como en «Sócrates es mortal», o completándose por sí misma al convertirse en argumento de una función de segundo nivel. Esto es lo que sucede cuando la elipsis en «... es mortal» es completada con un cuantificador tal como «Toda cosa».

Para completar nuestro esquema de la teoría fregeana de la cuantificación, abandonemos el campo de los cuantificadores mismos y consideremos otras expresiones del lenguaje natural y sus equivalentes en la escritura conceptual, cuya tarea es conectar entre sí a las proposiciones más que construir proposiciones aisladas. La más importante de estas conexiones es la condicionalidad, cuyo signo corresponde al «si» del lenguaje ordinario.

---

[6] En la propia escritura de Frege hay dos tipos de variables en letras minúsculas: letras góticas, cuyo alcance está determinado por un cuantificador que contiene la misma letra, y letras cursivas, cuyo alcance se extiende a la proposición completa en que ocurren.

Supóngase que tenemos dos proposiciones «*p*» y «*q*». Si se nos pide que hagamos un juicio sobre ellas, hay cuatro posibles líneas a seguir. Podríamos:

(1) Afirmar *p* y afirmar *q*,
(2) Afirmar *p* y negar *q*,
(3) Negar *p* y afirmar *q*,
(4) Negar *p* y negar *q*.

Frege introduce un signo, que podemos representar por «→», cuyo papel explica más o menos como sigue: Alguien que afirme «*q*→*p*» desea renunciar a la opción (3) y retener las otras tres opciones.

Los lógicos modernos operan con un signo cuya función en el cálculo es prácticamente la misma que la del signo de Frege. Pero explican su operación en términos de verdad y falsedad en lugar de los de afirmación y negación. Lo cual clarifica mucho la explicación[7]. Las cuatro posibilidades para *p* y *q* son ahora:

(1) *p* es verdadero y *q* es verdadero,
(2) *p* es verdadero y *q* es falso,
(3) *p* es falso y *q* es verdadero,
(4) *p* es falso y *q* es falso,

y «*q*→*p*» es verdadero, en esta versión, justamente cuando no se dé la tercera posibilidad (en cuyo caso una de las otras tres ha de darse).

Algunos lógicos han propuesto «*q*→*p*» como equivalente a «si *q* entonces *p*». Si aceptamos esta equivalencia, entonces las proposiciones siguientes son verdaderas:

---

[7] El procedimiento de Frege parece envolver aquí una confusión de lógica y psicología de un tipo que posteriormente rechazaría con desprecio. Más adelante, se encuentran en la *Conceptografía* pasajes mucho más inspirados en los que se pregunta, no si *p* es afirmada y *q* negada, sino si *p va a ser* afirmada y *q va a ser* negada. Siguiendo la línea de estos pasajes, he intentado parafrasear en mi exposición las enseñanzas fregeanas procurando evitar la confusión mientras guardaba la mayor fidelidad posible a las intenciones del autor.

Si el sol está brillando, $3 \times 7 = 21$.

Si el movimiento perpetuo es posible, el mundo es infinito.

Si la luna está en cuadratura con el sol, entonces la luna aparece como semicircular.

Estas proposiciones están sugeridas por ejemplos dados por Frege para ilustrar el significado de este símbolo para la condicionalidad; pero el propio Frege niega aquí que la palabra «si» del lenguaje natural sea apropiada en los dos primeros casos[8]. En el primero de ellos afirmaríamos «$q \rightarrow p$» simplemente porque incondicionalmente afirmaríamos «p»; el segundo es un caso en el que afirmaríamos «$q \rightarrow p$» simplemente porque incondicionalmente negaríamos «q». El tercer caso, dice Frege, representa un juicio que uno podría hacer sin saber si «p» o «q» iban a ser afirmados o negados. Es sólo en este caso, sugiere él, cuando es apropiado interpretar «$q \rightarrow p$» como «si q entonces p». La conexión causal implícita en la palabra «si», «no está expresada por nuestro simbolismo», indica Frege. Hay otras conexiones distintas de las causales que pueden ser expresadas por la partícula «si» (puedo usar la palabra, por ejemplo, para expresar una conexión lógica, una geométrica o un propósito condicional que yo me haya hecho). El signo de Frege tampoco expresa estas conexiones: ese símbolo no representa conexión alguna entre el contenido de los enunciados que une, sino sólo entre la verdad y falsedad de cada uno de ellos.

El signo de Frege está relacionado con la palabra «si» del mismo modo en que, en general, las expresiones de su escritura conceptual están relacionadas con el lenguaje natural. Lo cual quiere decir que este signo puede ser considerado como una versión simplificada de la palabra «si», diseñado para capturar justamente aquel aspecto de

[8] Más tarde modificaría su postura respecto a esta cuestión; véase pág. 263.

ella que es necesario para la formulación de pruebas rigurosas que la contengan. Si sabemos que «si *q* entonces *p*» es verdadera, sabemos al menos que no es el caso de que *q* sea verdadera y *p* falsa. Este mínimo de contenido, sostenía Frege, es todo lo que necesitamos para expresar rigurosamente las cadenas de razonamiento necesarias en lógica y en aritmética.

Podemos analizar una proposición formada por la unión de dos proposiciones mediante el signo «→» en función y argumento del mismo modo que antes lo hicimos con las proposiciones simples. Frege no lo hace explícitamente en la *Conceptografía*, pero sí lo realiza en alguna obra posterior. La función «... → ...» toma enunciados como argumentos, tal como «... es mortal» era una función que tomaba nombres como argumentos. «Es de noche → está oscuro» es el valor de la función «... → ...» (que igualmente podríamos también haber escrito «*q*→*p*») para los argumentos «es de noche» y «está oscuro». La función «*q*→*p*» es una función cuyos valores y argumentos son ambos enunciados. Es una función que posee una particular propiedad: que el enunciado que es su valor sea verdadero o falso dependerá exclusivamente de que los enunciados que constituyen sus argumentos sean verdaderos o falsos. Las funciones de este tipo fueron posteriormente llamadas por Bertrand Russell «funciones veritativas».

El condicional no es la única función veritativa. La negación, representada por el signo «¬», es una función veritativa, puesto que una proposición negada es verdadera justamente en el caso en que la proposición que se niega es falsa, y viceversa. Mientras que el condicional es una función veritativa de dos argumentos, la negación tiene sólo un único argumento. Pero hay otras funciones veritativas de dos argumentos. Una conjunción («*p* y *q*») es el valor de una función cuyos argumentos son las dos proposiciones conjuntadas; es verdadera si sus dos argumentos son verdaderos, y falsa en todos los otros casos. Una disyunción («*p* o *q*») puede ser considerada verda-

dera si al menos uno de sus argumentos es verdadero, y falsa si ambos son falsos[9].

Frege (a diferencia de algunos lógicos posteriores) no introduce símbolos especiales de conjunción y disyunción que se relacionen con «y» y con «o» del mismo modo que «→» se relaciona con «si», aunque reconoce la posibilidad de hacerlo (C, § 7). En lugar de ello expresa la conjunción y la disyunción valiéndose de los signos de negación y de condicionalidad. Así utiliza «$\neg q \rightarrow p$» cuando hay que desechar el caso en el que p tiene que ser negada y la negación de q va a ser afirmada; lo cual equivale según Frege a «p y q no pueden ambas ser negadas»; y éste es el significado que él asigna a «p o q». Del mismo modo, «$q \rightarrow \neg p$» es utilizado cuando hay que descartar el caso en que la negación de p va a ser negada y q va a ser afirmada. Si negamos esto a su vez, obtenemos «$\neg(q \rightarrow \neg p)$», que puede ser traducido como «p y q».

Frege habría utilizado la misma expresión «$\neg(q \rightarrow \neg p)$» para traducir «$p$ pero q» también como «p y q». Sin embargo, observa que en lenguaje ordinario «p pero q» difiere de «p y q» en que la primera no se limita a expresar justamente la verdad conjunta de las dos proposiciones; e igualmente señala que transmite algo inesperado acerca del hecho de que q. Sin embargo, esta diferencia entre «pero» e «y» es una característica del lenguaje ordinario que él no intenta reproducir en su simbolismo[10]. Una proposición compuesta con «pero», mantiene Frege, tiene el mismo contenido conceptual que una compuesta con «y»; y este contenido conceptual puede ser transmitido, como se acaba de explicar, mediante sus signos de condicionalidad y negación (C, § 7).

Sería posible, como afirma Frege, tomar la dirección opuesta. Podríamos introducir un símbolo para la función

[9] Hacia el final de su vida, en su ensayo «Composición de pensamientos», Frege trata estas cuestiones de manera mucho más simple y clara; véase págs. 263-4.

[10] Más adelante llamaría «colorido» a esta característica; véase pág. 235.

veritativa de la conjunción, digamos «&»: «p & q» será verdadera cuando p sea verdadera y q sea verdadera, y falsa en cualquier otro caso. En lugar de introducir un signo para la condicionalidad como signo primitivo, podríamos definir uno en términos de «&»: así «$q \rightarrow p$» podría ser definido como «$\neg (q \; \& \; \neg p)$». Éste podría parecer, por cierto, un procedimiento más natural. Frege dice que él prefiere tomar como básico el signo de la condicionalidad porque en la operación de deducción lógica es más importante que el de la conjunción, y la expresión «si... entonces» y su correlato simbólico parecen tener una especial relación con la deducción. La cuestión resultará más clara en el capítulo siguiente, cuando tracemos el desarrollo sistemático de la lógica que hace el propio Frege.

Pero antes de entrar en ello, consideremos otro importante concepto básico introducido por Frege en la *Conceptografía*. Se trata de la noción de *identidad de contenido*. Frege introduce el símbolo «≡» que es definido así: cuando afirmamos «$X \equiv Y$» estamos afirmando que el símbolo «X» y el símbolo «Y» tienen el mismo contenido conceptual, de suerte que siempre podemos reemplazar «X» por «Y» y viceversa.

Varias cosas hay que observar respecto a esta definición. En primer lugar, «≡» puede ser colocado entre símbolos de varios tipos: en lugar de «X» y en lugar de «Y» podemos escribir proposiciones completas, o nombres, sean simples o complejos. Al hablar de la identidad de contenido, Frege utiliza «nombre» para cubrir todos los otros tipos diferentes de símbolos. En segundo lugar, Frege llama la atención sobre una especial característica del signo «≡». La definición acabada de dar implica que la aserción de «$X \equiv Y$» es una aserción sobre nombres, no sobre sus contenidos. Frege escribe:

> Mientras que en los demás casos, los símbolos son meramente representantes de su contenido, de suerte que toda combinacion en la que aparecen expresa tan sólo una relación de sus respectivos contenidos, de pronto se muestran ellos mismos cuando se combinan

por medio del símbolo de la igualdad de contenido; pues tal combinación expresa la circunstancia de que dos nombres tienen el mismo contenido (C, pág. 26).

Cabría pensar que en un lenguaje perfecto hubiera un único símbolo para cada contenido diferente. En ese caso no habría necesidad de un símbolo para la identidad de contenido, y tal símbolo sería inútil puesto que las únicas proposiciones que los contuviesen serían truismos de la forma «$X \equiv X$». Pero las cosas no son así: es necesario contar con un símbolo para la identidad de contenido porque es posible determinar el mismo contenido de maneras muy diversas; y puede ser un juicio significativo que dos diferentes modos de determinación den el mismo contenido.

Frege ilustra esta cuestión con un ejemplo geométrico[11]. Supóngase que *a, b, c* son las líneas que conectan los vértices de un triángulo con el punto medio de los lados opuestos. «El punto de intersección de *a* y *b*» y «el punto de intersección de *b* y *c*» son dos nombres complejos diferentes. Pero los dos son nombres del mismo punto. En la terminología de la *Conceptografía* hay nombres con el mismo contenido. La existencia de diferentes nombres con el mismo contenido no es una imperfección del lenguaje: la matemática resultaría enormemente empobrecida si no fuera posible determinar el mismo contenido de más de un modo. En el ejemplo dado, la verdad de la aserción «El punto de intersección de *a* y *b* ≡ El punto de intersección de *b* y *c*» es, por supuesto, fácilmente visible. Pero el establecimiento de equivalencias más complicadas pueden requerir largos periodos de trabajo.

El signo «≡» fregeano puede ser considerado como una extensión del signo aritmético «=». El «=» de la aritmética puede ser colocado entre expresiones numéricas y utili-

[11] El ejemplo real usado por Frege en la *Conceptografía* es innecesariamente complejo; aquí he utilizado uno más simple extraído de *Collected Papers on Mathematics*, pág. 158.

zado para indicar que las expresiones que lo flanquean denotan el mismo número. El signo «≡» puede ser colocado entre expresiones de la más variada índole, y utilizado para indicar que las expresiones que lo flanquean nombran el mismo contenido, de cualquier clase que sea.

Frege dice que si «$X \equiv Y$» puede ser afirmado con verdad, entonces «X» puede siempre ser reemplazado por «Y», y a la inversa. ¿Cuál es la fuerza de la expresión «puede» aquí? ¿Quiere Frege decir que si tomamos una proposición que contenga a «X» y reemplazamos a «X» por «Y», obtendremos otra proposición con el mismo contenido? Seguramente no. Si Frege hubiera afirmado en la *Conceptografía*

La Reina de Inglaterra ≡ La Emperatriz de la India

hubiera hecho una aserción verdadera (La Reina Victoria había recibido ese título muy poco antes de que él escribiera). Pero la proposición no tiene seguramente el mismo contenido que esta siguiente, construida a partir de la anterior reemplazando «La Emperatriz de la India» por las palabras «La Reina de Inglaterra»

La Reina de Inglaterra ≡ La Reina de Inglaterra.

Esta última proposición es un puro truismo, mientras que para hacerse un juicio sobre la primera uno tiene que saber algo de la historia constitucional inglesa.

Cuando Frege dice que si «X» e «Y» tienen idéntico contenido entonces «X» puede ser reemplazada por «Y» en una proposición, lo que debe querer decir no es que el reemplazo no afecta al contenido de la proposición en absoluto, sino que no afectará al valor de verdad que tuviera la proposición. Debe querer decir que si tomamos una proposición verdadera que contenga las palabras «La Reina de Inglaterra» y reemplazamos esas palabras por «La Emperatriz de la India», la proposición seguirá siendo verdadera, y que similarmente, un enunciado falso seguirá siendo falso después de un reempla-

zo semejante. Como más tarde diría, la proposición retendrá su *valor de verdad* (es decir, su verdad o falsedad, según sea el caso) después de la sustitución. Frege había de idear más tarde una especial terminología —el par de términos «sentido» y «referencia»— para clarificar los elementos de ambigüedad resultantes de utilizar sólo el único término «contenido» para expresar lo que una proposición significa.

En el capítulo siguiente explicaremos el sistema de lógica que Frege construyó cuando puso en práctica los símbolos que había inventado para su escritura conceptual. El objetivo del presente capítulo ha sido presentar el instrumental de la lógica de Frege de manera que quedaran subrayados aquellos elementos que habían de sobrevivir en sus ulteriores escritos y que continúan siendo operativos en lógica en el tiempo presente. Ello ha significado minimizar ciertos elementos de la *Conceptografía* que ahora nos resultan claramente confusos. Esta tarea nos ha sido facilitada por el trabajo posterior del propio Frege, en el que —como veremos más adelante— quedan identificadas y clarificadas muchas de las confusiones de la *Conceptografía*.

Uno de estos insatisfactorios elementos del sistema de la *Conceptografía* es, sin embargo, demasiado importante para ser ignorado o glosado con una paráfrasis benevolente. El primer símbolo realmente nuevo que Frege introduce (C, § 2) es lo que él llama «la barra del juicio». Y escribe así:

> Un juicio se expresará siempre por medio del símbolo
>
> $$\vdash$$
>
> colocado a la izquierda de los símbolos o combinaciones de símbolos que indican el contenido del juicio. Si se omite la pequeña barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, esto transforma el juicio en una mera combinación de ideas, acerca de la cual no expresa quien la escribe la aceptación o no aceptación de su verdad. Por ejemplo, hagamos que

$\vdash A$

> signifique el juicio: «los polos magnéticos opuestos se atraen entre sí». Entonces
>
> $— A$
>
> no expresará este juicio; simplemente evocará en el lector la representación de la atracción recíproca de los polos magnéticos opuestos —tal vez para que éste realice sus inferencias sobre el fenómeno y las use para comprobar la corrección de la idea. En este caso, la parafraseamos mediante las palabras «la circunstancia de que» o «la proposición que dice que» (C, págs. 13-14).

En su obra posterior, Frege insistió constantemente en la necesidad de distinguir entre lógica y psicología. Esa distinción queda desdibujada en este temprano pasaje. Frege está introduciendo un símbolo lógico y, sin embargo, lo hace en lenguaje psicológico, pues define al símbolo en términos de un contraste entre juicio y combinación de ideas. Pero el juicio es con seguridad un acto mental, y las ideas son con seguridad algo que hay en la mente.

Podríamos decir que juzgar que *p* consiste en un acto que es el equivalente mental del acto lingüístico de afirmar que *p;* es, por usar la expresión bíblica, «decir en el corazón de uno» que *p*. Frege dice indiferentemente que la barra vertical expresa un juicio y también una aserción. En la actualidad, su símbolo es comúnmente identificado como su «signo de aserción»[12].

---

[12] De hecho, como el párrafo citado muestra, era sólo la parte vertical de este símbolo la que había de expresar el juicio o aserción; la línea horizontal es lo que Frege llama «la barra del contenido». Su función, en este simbolismo, es la de ligar del modo apropiado los símbolos que aparecen tras ella. En la versión modernizada del simbolismo fregeano que se utiliza en este libro, y en la mayoría de las actuales exposiciones de Frege, es superflua. Véase el Apéndice I.

Es cierto, e importante, que hay una gran diferencia entre juzgar que *p* y juguetear meramente con el pensamiento de que *p*. Una diferencia similar es la que hay entre afirmar que *p* y proponer meramente la proposición de que *p*. Una proposición puede ser propuesta, como dice Frege, a título de hipótesis; u ocurrir, no aseverada, como parte de otra proposición. Un filósofo contemporáneo ha ofrecido una versión de la utilidad del signo de aserción de Frege del siguiente modo:

> ¿Significa *p* lo mismo en sus dos ocurrencias en «*m*, si *m* entonces *p*, *luego p*»; o también en «no *m*, *m* o *p*, luego *p*»? Si su significado es el mismo, no hay inferencia, porque la aserción «*p*» es ya parte de las premisas; si no es el mismo, la inferencia está viciada por la ambigüedad de «*p*». Frege hubiera escrito tales inferencias como sigue: «/├—*m*; /├—(si *m* entonces *p*), luego /├—*p*»; «/├—(no *m*), /├—(*m* o *p*), *luego* /├—*p*». El contenido afirmado en «/├—*p*» ocurre también en la premisa «/├—(si *m* entonces *p*)» o en «/├—(*m* o *p*)», pero no está afirmado en este último contexto[13].

Esto captura bien a mi juicio lo que Frege tenía en mente cuando introdujo el signo de aserción. Sin embargo, su introducción —como puede verse con ayuda de posteriores trabajos de Frege— envuelve una confusión entre lógica y lo que de un modo amplio podríamos llamar psicología. Que yo afirme algo, o juzgue algo, es asunto de mi historia mental. Es el contenido de lo afirmado lo que concierne a la lógica —el contenido conceptual en el propio sentido de Frege de lo que es relevante para la realización de inferencias. Si «*q*» se sigue lógicamente de «*p*», entonces lo hace con independencia de que yo, o cualquier otro, afirme de hecho que *q* o juzgue de hecho que *p*.

Como dice Frege, es posible mantener el pensamiento de que los polos magnéticos distintos se atraen mu-

[13] Geach, en G. E. M. Anscombe y P. T. Geach, *Three Philosophers*, Blackwell, 1961, pág. 133.

tuamente sin necesidad de juzgar sobre ello. Cabría llamar a esto —aunque Frege vería más tarde razones para no hacerlo— la idea compleja de la atracción mutua de los polos distintos. Pero si hablamos de esta idea (que, por ser una idea, es algo mental) deberemos distinguirla de la circunstancia de que los polos magnéticos se atraigan entre sí (que de ocurrir, ocurre en el mundo real, no en la mente) y de la proposición que dice que los polos distintos se atraen mutuamente (que, si hemos de guiarnos por la palabra alemana «Satz», en el original fregeano, es un elemento del lenguaje). El párrafo de Frege más arriba citado parece mezclar elementos lingüísticos, mentales y del mundo real de un modo que el propio Frege miraría más tarde con profunda reserva.

Un mérito que Frege continuaría manteniendo era que su signo de aserción subrayaba la distinción entre aserción y predicación; el signo ponía de manifiesto que adjudicar un predicado a un sujeto no envolvía necesariamente, como algunos lógicos posteriores han mantenido erróneamente, hacer una aserción sobre lo que el sujeto nombraba. En «Si el Partido Laborista gana las elecciones, la libra será devaluada», la expresión «ganar las elecciones» está adjudicada como predicado gramatical a «El Partido Laborista» como sujeto gramatical, pero no se afirma en parte alguna que el Partido Laborista ganará las elecciones[14].

[14] Frege anunció en la *Conceptografía* su intención de abandonar la distinción entre sujeto y predicado; pero introdujo una modificación poco afortunada de ella en conexión con el signo de aserción. Hablaba como si la introducción del signo de aserción equivaliese a la reducción de todos los predicados al predicado único «es un hecho» (C, pág. 15). Así, "Arquímedes pereció en la toma de Siracusa" podría ser expresada según Frege como "la muerte violenta de Arquímedes en la toma de Siracusa es un hecho". Pero esta perspectiva implica seguramente la incoherente noción de que la predicación incluye aserción, la misma confusión que más tarde Frege consideró que era función del signo de aserción disipar.

El punto más importante introducido por Frege en el contexto del establecimiento del signo de aserción es que la negación, y la distinción entre universal y particular, se alinean no con el juicio o la aserción, sino más bien con el posible contenido del juicio. Fue sólo en sus últimas obras donde expuso sus razones para afirmarlo; pero su propio desarrollo de la lógica en la *Conceptografía* hubiera sido imposible si la negación y la cuantificación no hubieran podido ser aplicadas a proposiciones no afirmadas.

Capítulo III

Conceptografía, II

Hemos visto en el capítulo anterior que Frege simbolizaría un enunciado universal, tal como «Toda cosa es mortal», utilizando su símbolo de cuantificación universal:

$$(x)\ (x \text{ es mortal})$$

De hecho, es raro que deseemos expresar enunciados de una generalidad tan irrestricta. Lo más común es que deseemos decir que toda cosa *de un cierto tipo* tiene una cierta propiedad, o que todo lo que tiene una cierta propiedad dada tiene también alguna otra propiedad. «Todos los hombres son mortales» o «Lo que sube debe bajar» son ejemplos de proposiciones universales típicas en el lenguaje ordinario.

Frege simboliza tales proposiciones haciendo uso del signo de generalidad y del signo de condicionalidad. La expresión

$$(x)\ (Fx \rightarrow Gx)$$

puede ser leída

Para todo x, si Fx entonces Gx,

que hay que interpretar, según se explica en la *Concep-*

tografía, en el sentido de que cualquiera que sea lo que se ponga en lugar de «*x*», no se dará jamás el caso en que «*Fx*» sea afirmada y «*Gx*» negada. Siguiendo el estilo de exposición que Frege adoptó más tarde, podemos glosar esta expresión de manera más simple como: Con independencia de lo que *x* pueda ser, si «*Fx*» es verdadera, entonces «*Gx*» es verdadera.

Si sustituimos «*F*» por «es un hombre», y «*G*» por «es mortal», obtenemos: «Para todo *x*, si *x* es un hombre, *x* es mortal», que es lo que Frege ofrece como la traducción de «Todos los hombres son mortales» (C, § 11). Similarmente, si sustituimos «sube» por «*F*», y «debe bajar» por «*G*», entonces obtenemos una traducción en escritura conceptual de «Lo que sube debe bajar».

Conviene tener presente que el «si» del que aquí se trata es el «si» veritativo-funcional; «si *Fx* entonces *Gx*» no significa otra cosa que «no a la vez *Fx* y no *Gx*». De aquí que, si no hubiera hombres, entonces «Para todo *x*, si *x* es un hombre, *x* es mortal» no sería por eso menos verdadero; pues «*Fx*» sería falso fuera lo que fuera lo que eligiéramos para sustituir a «*x*», y por tanto no habría posibilidad de producir un caso en el que «*Fx*» fuera verdadero y «*Gx*» falso. Este punto marca una diferencia entre la formulación de Frege y la proposición del lenguaje natural «Todos los hombres son mortales». Los filósofos anteriores a Frege discrepaban respecto a la cuestión de si la proposición «Todos los hombres son mortales» sería verdadera si no hubiera hombres; algunos daban una respuesta positiva, otros negativa. La formulación de Frege adopta sin ambigüedad una de las dos interpretaciones de la ambigua proposición del lenguaje ordinario.

La contradictoria de «Todos los hombres son mortales» es «Algunos hombres no son mortales», que es simbolizada adjuntando el signo de negación a la fórmula para «Todos los hombres son mortales», así

$$\neg (x)(x \text{ es un hombre} \rightarrow x \text{ es mortal}).$$

De acuerdo con los manuales tradicionales de lógica, «Todos los hombres son mortales» no sólo tiene una contradictoria, sino también una contraria, a saber: «Ningún hombre es mortal». Esta proposición es formalizada en el simbolismo de Frege como

$$(x)\ (x \text{ es un hombre} \rightarrow \neg\, (x \text{ es mortal})),$$

esto es, cualquiera que x pueda ser, si x es un hombre, x no es mortal.

A su vez, la contradictoria de ésta es «Algunos hombres son mortales», que es simbolizada adjuntando nuevamente a la anterior fórmula el signo de negación:

$$\neg\, (x)\ (x \text{ es un hombre} \rightarrow \neg\, x \text{ es mortal})).$$

«Todos los *F*s son *G*», «Algunos *F*s son *G*», «Algunos *F*s no son *G*» y «Ningún *F* es *G*» eran los modelos de proposiciones que ocurrían en el «cuadrado de oposición» de la lógica tradicional, y cuyo papel en la evaluación de los argumentos silogísticos era de gran importancia. La traducción que hizo Frege de esos modelos le permitió formalizar la lógica de los silogismos y la del cuadrado de oposición. Pero todo ello lo realizó dentro del contexto de una única y completa sistematización de la lógica.

Las variables que, como las x anteriores, ocurren dentro del alcance de un cuantificador son llamadas por los modernos lógicos «variables ligadas». Las variables que ocurren fuera del alcance de los cuantificadores, como en

$$x + y = y + x$$

son llamadas variables libres. Frege hace uso frecuente de variables libres, tanto formal como informalmente. En su sistema formal utiliza letras cursivas para las variables libres y letras góticas para las variables ligadas y los

cuantificadores. La explicación que da Frege del uso de letras cursivas (C, § 11) equivale a decir que las variables libres han de ser tratadas como si fueran variables ligadas por un cuantificador universal cuyo alcance es la expresión entera. Con esta convención de que el alcance de una variable libre es la expresión entera, la posible ambigüedad entre dos tipos de negación (ilustrada en el capítulo anterior y solventada allí por el posicionamiento del cuantificador universal) queda eliminada. Porque una variable libre sólo nos permite expresar la generalidad de una negación, pero no la negación de una generalidad (GA, pág. 12). Para la negación de la generalidad necesitamos la notación cuantificacional; cuando tal negación no está en cuestión, el uso de variables libres permite abreviar las fórmulas (C, § 11).

Frege presenta en la *Conceptografía* un sistema de lógica que es *axiomático*. A la mayoría de las personas que han cursado estudios básicos de geometría les es familiar el concepto de un sistema axiomático: un sistema en el cual un gran número de proposiciones, llamadas «teoremas», son probadas derivándolas de manera formal de un pequeño número de proposiciones indemostradas llamadas «axiomas». La geometría había sido axiomatizada desde el tiempo de Euclides; pero la lógica no lo había sido antes de Frege. Los elementos esenciales para su axiomatización están expuestos en la *Conceptografía* en el capítulo titulado «Representación y deducción de algunos juicios del pensamiento puro».

Algunos principios de la lógica corresponden a las reglas que Frege estableció para el uso de los símbolos. Esos principios, observa Frege, no pueden ser expresados en su simbolismo, puesto que están presupuestos en él. Pero hay una gran cantidad de leyes lógicas que pueden ser establecidas en esa simbología, y el objeto de la axiomatización es mostrar que es posible aislar un pequeño núcleo de leyes que potencialmente entraña a todas las otras. Hay más de un camino para efectuar la reducción de la lógica a un pequeño conjunto de princi-

pios. Frege propone un sistema que parte de nueve axiomas básicos. Los tres primeros contienen, además de las letras de variables, solamente el signo de condicionalidad, mientras los tres siguientes contienen también el signo de negación. Luego hay dos axiomas que introducen el signo para la identidad de contenido; y finalmente hay un axioma que concierne al signo de generalidad, el cuantificador universal.

En orden a establecer sus proposiciones, Frege necesita variables enunciativas en adición a las primitivas funciones veritativas, es decir, letras que puedan sustituir a las proposiciones. Utilizaré las letras *p, q, r* para estas variables. Estrictamente hablando, necesitaríamos una regla que nos dijese cómo realizar esta sustitución. Frege no enuncia explicitamente ninguna regla de sustitución para las variables proposicionales, aunque no habría dificultad alguna en formular una que estuviera en consonancia con su práctica[1].

Los tres axiomas más fáciles de entender en una primera aproximación son los que envuelven la negación y la condicionalidad. De acuerdo con ello, en lo que sigue, he renumerado los primeros seis axiomas de Frege:

(1) $(q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q),$

(2) $\neg\neg p \rightarrow p,$

(3) $p \rightarrow \neg\neg p.$

Cualquier proposición obtenida por sustitución uniforme de esas letras de variable en estos axiomas dará lugar a algo que de manera bastante natural podrá ser descrito como una verdad auto-evidente. Obsérvese que

[1] El propio Frege utiliza las letras itálicas iniciales del alfabeto *a, b, c...* como variables proposicionales. En axiomas posteriores usa las mismas letras como variables individuales, reemplazables por nombres. En sus últimos escritos, pero no en la *Conceptografía,* esta práctica estaba justificada por su ulterior teoría de que las proposiciones son a su vez nombres.

(2) y (3) capturan el efecto de cancelación de la doble negación (C, § 18), y una instancia de (1) sería «Si es el caso de que si está vivo entonces respira, entonces si no respira no está vivo» (C, § 17).

Los axiomas que contienen sólo el signo del condicional son menos fáciles de captar intuitivamente, aunque si uno atiende a la definición del signo es posible ver que los tres encapsulan también truismos lógicos:

(4) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
(5) $[r \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow [(r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)]$,
(6) $[r \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow [q \rightarrow (r \rightarrow p)]$.

Frege afirma que (4) equivale a decir que si una proposición *p* es válida, entonces también lo es en el caso de que una proposición arbitraria *q* sea válida. Y comenta (5) diciendo que «si una proposición es consecuencia necesaria de dos proposiciones, y si la primera de estas dos es a su vez consecuencia necesaria de la otra, entonces la proposición original es la consecuencia necesaria de la última proposición sola» (C, § 14). Este comentario es útil para ayudarnos a captar la estructura del axioma dado en (5), aunque desde luego no es equivalente a él, porque el signo «$\rightarrow$» corresponde al «si» veritativo-funcional y no a ninguna noción de consecuencia necesaria. Como Frege ha subrayado anteriormente, la aserción de «$p \rightarrow q$» simplemente afirma que no es el caso que «*p*» sea verdadera y «*q*» falsa; pero no significa que «*q*» se siga de «*p*». La misma reserva hay que hacer respecto a la glosa que hace Frege del axioma dado en (6): «si una proposición es consecuencia de dos condiciones, entonces es indiferente su orden» (C, § 16).

Si un sistema axiomático tiene que hacer posible deducir teoremas a partir de un núcleo de axiomas, como Frege deseaba, entonces el sistema ha de contener no solamente los axiomas, o fórmulas iniciales, sino también reglas de inferencia que nos permitan derivar una fórmula de otra. La lógica tradicional contenía muchas reglas

o leyes de inferencia; por ejemplo, la ley de contraposición: «A partir de "Si *p*, entonces *q*" se infiere "Si no *q*, entonces no *p*"» —una ley que claramente tiene una relación con la verdad lógica encerrada en el primero de los axiomas enumerados más arriba.

Uno de los tradicionales modos de inferencia era conocido como *modus ponens*: «a partir de "*p*" y de "si *p* entonces *q*" se infiere "*q*"». Frege ofrecía probar en su sistema simbólico todas las leyes de la lógica utilizando como única regla de inferencia el *modus ponens* (C, § 6). Reconoce que otros lógicos, siguiendo a Aristóteles, emplean toda una serie de esquemas de inferencia, pero puesto que, a su juicio, es posible arreglárselas con un único modo, razones de claridad aconsejan limitarse a uno; en caso contrario no habría razón para detenerse en los esquemas aristotélicos y podríamos continuar añadiendo nuevos modos indefinidamente. Los otros modos de inferencia serán justificados por axiomas particulares o mediante teoremas probados a partir de los axiomas de Frege. Así, la inferencia (tradicionalmente llamada contraposición) de

Si Miguel está vivo, Miguel respira

a

Si Miguel no respira, Miguel no está vivo

está justificada por el axioma dado en (1) (C, § 17).

Para ilustrar el procedimiento de Frege voy a mostrar su modo de probar el primer teorema que deduce de sus axiomas de condicionalidad. Este teorema, al que llamaremos teorema 1, dice lo siguiente:

$$(q \rightarrow p) \rightarrow \{[r \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow [(r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)]\}.$$

Y es derivado así: Frege parte de su axioma 1, o sea, del que aquí hemos numerado con (4),

$$p \rightarrow (q \rightarrow p).$$

Luego sustituye «*p*» por su axioma 2, es decir, (5), en esta fórmula, para obtener

$$\text{axioma } 2 \rightarrow (q \rightarrow \text{axioma } 2).$$

A continuación sustituye en este axioma «*q*» por «$(q \rightarrow p)$», con lo que se tiene

$$\text{axioma } 2 \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow \text{axioma } 2];$$

lo que escrito de principio a fin en su simbolismo da como resultado:

$$\{[r \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow [(r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)]\} \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow \{[r \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow [(r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)]\}).$$

Por virtud de la regla «De "*p*" y de "$p \rightarrow q$" infiere "*q*"», podemos ahora derivar el teorema a partir de los axiomas 1 y 2 de Frege. Porque la fórmula acabada de imprimir es una instancia del axioma 1, y posee a su vez la siguiente forma

$$\text{axioma } 2 \rightarrow \text{teorema } 1.$$

Esto es algo que el lector puede verificar por sí mismo si le presta la debida atención. Pero la elaborada naturaleza incluso de esta primera prueba arroja luz sobre el especial significado que Frege daba a la «perspicuidad» cuando decía que el uso de sólo un modo de inferencia venía demandado por la perspicuidad.

Siguiendo en la línea de Frege, lógicos posteriores han producido formulaciones de la lógica bastante más fáciles de seguir y utilizar para el lector promedio, y hoy en día las formulaciones del propio Frege sólo tienen interés histórico. Su pretensión de servirse únicamente de una sola regla de inferencia no es de hecho cierta: como ya ha sido señalado, y como la prueba arriba expuesta muestra, Frege no está usando sólo el

modus ponens, sino que tácitamente está empleando otra regla que permite derivar de una fórmula dada una nueva fórmula sustituyendo uniformemente las variables literales en la fórmula original por cualquier otra fórmula correctamente construida. Sin embargo, esto no es un grave defecto en su sistema, pues la reducción de las reglas de inferencia a una sola no tiene el singular mérito que él le atribuye.

Lo verdaderamente importante es que sus primeros seis axiomas son de hecho suficientes para derivar todas las leyes de la lógica que no supongan analizar las proposiciones en función y argumento, sino tratarlas como unidades completas. (Incidentalmente, los seis axiomas son más de los necesarios para este propósito, porque resulta que algunos de esos axiomas pueden ser probados a partir de otros[2].) Esta rama de la lógica es llamada ahora cálculo de proposiciones, en contraste con el cálculo de predicados o cálculo de funciones que toma en consideración el hecho de que los enunciados están construidos a partir de sus elementos.

Para seguir el método de Frege en su tratamiento del cálculo de funciones habremos de rebasar sus primeros seis axiomas. Los axiomas séptimo y octavo incluyen su símbolo de identidad de contenido:

(7) $$(c \equiv d) \rightarrow [f(c) \rightarrow f(d)],$$

(8) $$c \equiv c$$

El axioma 7, explica Frege, dice que en cualquier parte podemos reemplazar «c» por «d» si $c \equiv d$. Mientras que, según él, el axioma 8 establece que el contenido de c es idéntico al contenido de c.

Partiendo de los axiomas 7 y 8 prueba Frege, mediante pasos simples, una serie de nuevos teoremas sobre la identidad de contenido, por ejemplo:

---

[2] Véase W. y M. Kneale, *El desarrollo de la lógica*, Madrid, Tecnos, 1972, pág. 453.

$$(c \equiv d) \rightarrow (d \equiv c)$$

El axioma 9 es el único que es crucial para el desarrollo del cálculo de funciones. En nuestra versión modernizada del simbolismo de Frege, el axioma es como sigue

(9) $$(x)\ (fx) \rightarrow fc$$

Lo cual equivale a decir que si *fx* es válido en general, entonces es válido para cualquier objeto dado. El ejemplo dado como ilustración por Frege es:

> Si todo lo que es un pájaro puede volar, entonces si este avestruz es un pajaro puede volar,

y a partir de esto podemos derivar en sus debidos pasos:

> Si este avestruz es un pájaro y no puede volar, entonces algunos pájaros no pueden volar.

Junto a este axioma 9, y para desarrollar el cálculo de funciones, Frege hace uso de dos reglas que ya habían sido establecidas al introducir la notación cuantificacional.

La primera regla es que a partir de $\Phi(c)$ podemos inferir $(x)\Phi(x)$, supuesto que *c* ocurra sólo en los lugares del argumento de $\Phi(\ )$, y supuesto también que (x) no ocurra ya dentro de $\Phi(c)$ (C, § 11). (La segunda restricción es necesaria para impedir que una variable en la expresión original caiga dentro del alcance del nuevo cuantificador acabado de introducir.)

Esta regla puede producir confusión: ¿autoriza acaso a hacer una inferencia de «esto es un avestruz» a «todo es un avestruz»? Con vistas a su clarificación conviene tener presente en primer lugar que no estamos ante un axioma o teorema que formalice una verdad lógica como la expresada en el axioma 9. Se trata de una regla formal

para transitar de una tesis a otra dentro del sistema particular de Frege: y el diseño del resto del sistema tiene una forma que nunca permite llegar a la situación de poder afirmar «$\Phi(c)$» sin que éste haya sido derivado de modo tal que su generalización sea correcta. (La regla podría tal vez ser comparada con un precepto como «toma siempre el segundo desvío a la derecha», que podría ser correcto dentro de un laberinto particular, pero incorrecto como regla general para encontrar la salida de cualquier laberinto.)

La segunda regla dice que de «$p \rightarrow \Phi(c)$» podemos derivar «$p \rightarrow (x)\Phi(x)$», a condición de que p sea una expresión en la que c no ocurra, y que c aparezca sólo en el lugar del argumento de $\Phi(c)$. Frege justificaba esto diciendo que si «$(x)\ \Phi\ (x)$» es falsa, tiene que ser posible aducir un significado para «$\Phi(c)$» que la haga falsa; pero puesto que es el caso que $p \rightarrow \Phi(c)$ esto no será posible, porque esta fórmula significa que, con independencia de lo que c pueda ser, no se da el caso de que $\Phi(c)$ pueda ser negada y p afirmada. La justificación depende claramente de la convención estipulada por Frege de que una letra en cursiva tiene por alcance el juicio entero en el que esa letra ocurre[3].

El noveno axioma de Frege, más estas dos reglas, en conjunción con las reglas y axiomas para el cálculo proposicional, son suficientes para la derivación de todas las verdades del cálculo funcional.

La tercera parte de la *Conceptografía* lleva por título «Algunas cuestiones de una teoría general de las series»,

---

[3] Véase pág. 60. Esta convención está explícitamente establecida en el pasaje en el que son establecidas las dos reglas (C, págs. 33-34). El chocante rasgo residual de la introducción de las reglas es que en el punto en donde se introduce el axioma de la teoría de la cuantificación (C, pág. 65) dice Frege: «Sea que b signifique un avestruz, es decir, un animal individual que pertenece a esta especie.» Aquí se está utilizando una letra itálica no como una variable libre, sino como nombre vacuo de un individuo.

y su propósito es ofrecer algunos ejemplos del modo en que la escritura conceptual puede ser usada para la formulación exacta de la aritmética. Al comienzo de esta tercera parte se inserta un nuevo elemento simbólico: una notación que permite la introducción de abreviaturas por definición. «$\Vdash A \equiv B$» sirve para establecer una definición, donde el nuevo símbolo, o definiendum, ocupa el lugar de «*B*» y la expresión simbólica que la notación abrevia ocupa el lugar de «*A*». La expresión empieza con dos barras verticales, y no con la simple barra vertical del juicio, porque, en palabras de Frege, esa expresión no dice «el lado derecho de la igualdad tiene el mismo contenido que el izquierdo», sino «debe tener el mismo contenido». De la definición no se sigue nada que no pudiera haber sido establecido sin ella; su función es únicamente la de simplificar las pruebas (C, página 70).

Aunque una definición no es un juicio, es fácil, observa Frege, convertirla en tal; tan pronto la definición ha sido aceptada se torna en una proposición analítica, verdadera en virtud de la definición misma. Este papel dual, dice Frege, es lo que viene indicado por la duplicación de la barra del juicio. El primer uso que Frege hace de su signo de definición es para definir la noción de *hereditaire* [hereditariedad] de una propiedad. A tal fin introduce un nuevo símbolo que, según nos dice, viene a ser equivalente a

La propiedad *F* es hereditaria en la serie *f*

Por su definición formal, este signo es declarado equivalente a:

$$(y)\ (F(y) \rightarrow (x)\ (f(y,x) \rightarrow F(x)).$$

¿Qué es una propiedad hereditaria, y por qué está Frege interesado en definir esta noción? Para ayudarnos a entender la respuesta a la primera cuestión, Fre-

ge propone la siguiente instancia de la fórmula definiente:

(*y*) [si *y* es humano, entonces (*x*) (si *x* es hijo de *y*, *x* es humano).]

Lo cual nos dice que la propiedad de ser humano es una propiedad hereditaria —hereditaria en la serie generada por la relación *hijo de*. La respuesta a la segunda cuestión es que Frege desea usar la noción de propiedad hereditaria con vistas a definir la noción general de *seguirse* en una serie. Esta definición puede ser usada a su vez para dar una explicación en términos puramente lógicos de la relación de sucesión que liga a los números en la serie numérica.

La relación de seguirse en una serie que Frege definió es comúnmente llamada ahora «la relación ancestral», puesto que una instancia de ella es la relación de un antepasado con sus descendientes. *A* es un antepasado de *B* si *B* es hijo de *A*, o hijo de un hijo de *A*, o hijo de un hijo de un hijo de *A*, y así sucesivamente. Lo que Frege buscaba era ofrecer una fórmula lógica exacta que capturase la idea intuitiva de ordenamiento en una serie encerrada en la expresión «y así sucesivamente». Y para ello propuso que la siguiente definición:

B sigue a *A* en la serie *f*

significase lo mismo que

> Para todo *F*, si cualquiera que tenga la relación *f* con *A* tiene la propiedad *F*, y si *F* es hereditaria en la serie *f*, entonces *B* tiene la propiedad *F*.

Así, si la serie *f* es la serie generada por la relación *hijo de*, entonces *B* seguirá a *A* en la serie (será un descendiente de *A*) si *B* tiene todas las propiedades hereditarias que pertenecen a todos los hijos de *A*.

Frege prueba varios teoremas que se derivan de sus definiciones. Uno de los más interesantes es éste:

> Si *A* tiene una propiedad *F* que es hereditaria en la serie *f* y si *B* sigue a *A* en la serie *F*, entonces *y* tiene la propiedad *F*.

Aplicado a la serie numérica, este teorema puede ser utilizado como base de la inducción matemática, el procedimiento por el cual concluimos que si una propiedad pertenece al número 0, y pertenece también a todo número que sea el sucesor de cualquier número que tenga esa propiedad, entonces la propiedad pertenece a todos los números naturales. La aplicación de las definiciones dadas en la *Conceptografía* al desarrollo de la serie de los números naturales hubo de esperar, sin embargo, a la publicación algunos años más tarde de *Los fundamentos de la aritmética*.

CAPÍTULO IV

Los fundamentos de la aritmética, I

Frege se vio llevado a escribir *Los fundamentos de la aritmética* por su convicción de que los conceptos y operaciones más fundamentales de la aritmética estaban mal entendidos por los matemáticos y filósofos más ilustres de su tiempo. Nuestra intuición de la estructura básica de la aritmética, sostenía Frege, es escandalosamente defectuosa. Nadie puede ni siquiera dar una respuesta coherente a la cuestión de qué sea el número uno, o qué significado tiene el numeral «uno». Para ilustrar esta situación Frege imagina el siguiente diálogo:

A. ¿Qué es el número uno?
B. Una cosa.
A. Pero, ¿qué cosa?
B. La que se te antoje.
A. Entonces, ¿yo puedo reemplazar en una ecuación el «1» por lo que se me antoje?
B. Del mismo modo que en «$x + x - x = x$» puedes reemplazar x por cualquier número.
A. ¿Puedo reemplazar «1» por «la luna» en «1 + 1 = 2»?

En este punto no parece haber respuesta alguna para B. Si ponemos «la luna» en el lugar de «1» las dos veces producimos una falsedad: sólo hay una luna circundan-

do la tierra, no dos. Por otra parte, si ponemos alguna otra cosa en el segundo lugar, digamos «el sol», haríamos exactamente lo que no nos habríamos permitido hacer en el caso paralelo de B. La fórmula algebraica expresa una verdad solamente si sustituimos siempre la misma letra por el mismo numeral.

De hecho, argumenta Frege, es un error creer que los enunciados sobre números son generalizaciones acerca de objetos no numéricos del mismo modo que las fórmulas algebraicas pueden ser consideradas como enunciados generales sobre números. Así, «$1 \times 1 = 1$», insiste Frege, «no dice nada sobre la luna, nada sobre el sol, nada sobre el Sahara, nada sobre el Pico de Tenerife». El número uno es más bien, *prima facie* al menos, un objeto particular, que tiene propiedades que le son inherentes, tal como la de permanecer intacto cuando se lo multiplica por sí mismo. Pero la naturaleza de este objeto, y la de los otros enteros positivos, sigue siendo totalmente oscura, mientras la mayoría de la gente ni siquiera es consciente de que aquí haya un problema.

Si la naturaleza de los números es pobremente entendida, la naturaleza del cálculo también es generalmente mal concebida. A veces se lo considera como un tipo especial de pensamiento: «pensamiento agregativo mecánico» fue una definición ofrecida por un contemporáneo de Frege. Pero, según Frege, el pensamiento es esencialmente el mismo en toda circunstancia: no hay diferentes leyes del pensamiento apropiadas para los diferentes tipos de objetos que podemos pensar. El objetivo principal de este libro es argumentar que todas las inferencias que parecen ser peculiares de la matemática (tales como, por ejemplo, la inducción matemática) están basadas en leyes generales de la lógica.

La tarea de Frege envolvía consideraciones tanto matemáticas como filosóficas: y él era consciente de que muchos de los matemáticos de su tiempo no se fiaban de la filosofía. La razón de ello, mantiene Frege, está en una nefasta confusión dentro de la filosofía misma —la

incapacidad de distinguir entre el ámbito de la lógica y el ámbito de la psicología. La psicología no era efectivamente asunto del matemático puro: pero la lógica, correctamente entendida, era algo bastante diferente de la psicología.

La psicología es el estudio experimental de la mente, la búsqueda de regularidades que gobiernan los fenómenos mentales. En tiempos de Frege gozaba de un prestigio particular entre los filósofos de la escuela empirista, es decir, entre aquellos filósofos que buscaban fundamentar todo el conocimiento humano sobre la base de la experiencia sensorial. Porque para los verdaderos empiristas, los contenidos de la mente humana son reducibles a dos grandes clases. Por una parte están las impresiones sensoriales, incluyendo tanto las respuestas de los sentidos externos como las sensaciones internas y los sentimientos, y por otra las imágenes mentales, formadas de las huellas dejadas en nosotros por anteriores impresiones sensoriales. El filósofo empirista más famoso del siglo XIX era John Stuart Mill, y Frege dedicó secciones sustanciales de su libro a la refutación del tratamiento del número realizado por Mill. Ya en su introducción insiste Frege en que las sensaciones e imágenes mentales no tienen nada que ver con la aritmética. «Lo vacilante e indeterminado de todas estas configuraciones guarda fuerte contraste con la determinación y solidez de los conceptos y objetos matemáticos» (FA, Introd., página 110).

Por supuesto, Frege no niega que un matemático tenga sensaciones e imágenes mentales, o que las imágenes de la mente puedan tomar parte en los procesos mentales del que está embarcado en un cálculo aritmético. Pero aduce dos argumentos para mostrar que las imágenes y pensamientos de nuestra mente no son los objetos que la aritmética considera. En primer lugar, diferentes matemáticos asocian diferentes imágenes con el mismo número: una persona puede pensar en la palabra «cien», otra en el símbolo «100», otra en la letra «C»:

ello es señal de que las imágenes son algo meramente accesorio para la aritmética. En segundo lugar, incluso aunque la psicología progresara desde el estudio de las imágenes al estudio de los pensamientos de nuestra mente, seguiría aún sin tener nada con qué contribuir a la aritmética. Supóngase que la psicología pudiera dar explicaciones causales de la ocurrencia del pensamiento de que diez al cuadrado es cien, por ejemplo. Incluso así, la psicología sería totalmente diferente de la aritmética. Porque la aritmética se interesa por la verdad de tales proposiciones, mientras que a la psicología sólo le concierne su ocurrencia en el pensamiento. «Una cosa es que una proposición sea pensada, y otra que ésta sea verdadera» (FA, Introd., pág. 111).

Una proposición puede ser pensada sin que sea verdadera, como cuando uno comete un error en una multiplicación y extrae un producto erróneo. Tiene el pensamiento de que 125 × 387 = 48.357, pero no existe tal verdad aritmética. Igualmente, una proposición puede ser verdadera, sin que sea pensada: el teorema de Pitágoras era válido mucho antes de que Pitágoras lo probara. «Una proposición no deja de ser verdadera porque yo no piense en ella, como el sol no deja de existir cuando cierro los ojos» (FA, Introd., pág. 111).

La psicología se interesa por las condiciones causales de nuestros procesos mentales; la matemática se interesa por la prueba, o la justificación, de los pensamientos que abrigamos. Pero causa y prueba son cosas bastante diferentes. Sin una apropiada ración de fósforo en su cerebro, Pitágoras hubiera sido incapaz de realizar la prueba de su teorema; pero esto no significa que entre las líneas de la prueba tuviera que aparecer un enunciado sobre el contenido de fósforo en su cerebro.

Si los cuerpos y los cerebros de los hombres han evolucionado, no hay duda de que también ha habido evolución en la conciencia humana. Así pues, si la matemática trata de sensaciones e ideas, los matemáticos deberían ser cautelosos al hacer afirmaciones muy gene-

rales. Cuando un astrónomo saca conclusiones sobre épocas muy distantes en el pasado, estaríamos justificados al censurarlo así:

> Reconoces que 2 × 2 = 4; pero la representación numérica tiene un desarrollo, tiene una historia. Puede ponerse en duda incluso que haya progresado hasta aquí. ¿Cómo puedes saber que en un distante pasado ya existía esa proposición? ¿No podrían haber sostenido las criaturas de entonces que 2 × 2 = 5, y después por medio de la selección natural, en la lucha por la existencia, haberse llegado a la proposición de que 2 × 2 = 4, y que ésta pueda a su vez estar destinada a perfeccionarse, por el mismo camino, en la proposición 2 × 2 = 3? (FA, Introd., pág. 111).

La *reductio ad absurdum* de Frege acierta a mostrar que la aritmética no puede ser considerada como una ciencia cuyos objetos son la sensación y la imaginación humanas. Pero es importante aclarar qué es lo que exactamente está refutando. Aquí, como más sistemáticamente lo hace en otro lugar, Frege traza una distinción entre ideas y conceptos. Las ideas son las imágenes mentales y otros fenómenos anímicos de los que se ocupa la psicología: quizá estos objetos estén sujetos al proceso de la evolución, pero son irrelevantes para la aritmética. Los conceptos, por otra parte, son un objeto de estudio para el matemático; pero los conceptos no son cosas que evolucionan. Es un error creer que brotan y crecen en la mente individual. Si los conceptos tienen una historia, no es una historia de su propio desarrollo, sino de nuestro descubrimiento y expresión de ellos. Lo que Frege quiere decir por «concepto» es ya conocido en parte por el lector que ha seguido la exposición de su *Conceptografía;* un tratamiento más detallado del tema será expuesto más adelante cuando analicemos sus últimos escritos. Lo que sí mantuvo Frege en todos los periodos de su vida es que un concepto es una entidad muy diferente de una imagen mental, y que se trata de algo que es objetivo, no subjetivo.

La matemática, por tanto, debe ser separada estrictamente de la psicología. La resistencia de los matemáticos a cooperar con los filósofos era comprensible en un tiempo en que la misma filosofía no estaba muy claramente distinguida de la psicología experimental. Pero mientras la matemática tiene que liberarse de cualquier conexión con la psicología, debe en cambio, dice Frege, establecer unos vínculos más estrechos con la lógica. No se trata sólo de que una indagación sobre la fuerza de una prueba tenga que ser asunto de la lógica: eso todo el mundo lo admitiría. Hemos de ir más allá y asegurarnos de que toda definición utilizada en matemática está justificada con el mismo rigor con que ha sido tratada en las pruebas formales. No basta con asumir que una definición está justificada porque sea fértil en aplicaciones y porque, como resultado de su empleo, no haya sido descubierta ninguna contradicción. Para justificar la definición de una manera apropiada es necesario adentrarse en los fundamentos lógicos de la matemática hasta una profundidad inexplorada hasta ahora.

Frege acaba la introducción de los *Fundamentos* estableciendo los tres principios fundamentales que gobiernan esta obra:

(1) Hay que separar tajantemente lo que es psicológico de lo que es lógico, lo subjetivo de lo objetivo.
(2) No se debe preguntar por el significado de una palabra aislada, sino en el contexto de una proposición.
(3) Hay que tener siempre presente la distinción entre concepto y objeto.

El primer principio es un resumen de lo que ha sido dicho hasta ahora, pero los otros dos surgen repentinamente, sin que su significado haya sido aclarado hasta el presente. Frege liga el segundo principio con el primero al decir que, de no tenerlo en cuenta, casi nos veríamos

forzados a tomar como significados de las palabras a las imágenes mentales. Lo que parece querer decir con esto es que si en una proposición nos encontramos con una palabra que no parece corresponder a ningún objeto del mundo externo, podemos vernos tentados a decir que se refiere a algún objeto interno, un elemento mental subjetivo. La relevancia de esto para la aritmética, al igual que la importancia de la distinción entre concepto y objeto, sólo será patente más adelante. Será mejor posponer la discusión de los «principios fundamentales» de Frege hasta haber considerado las principales líneas del libro; entonces nos resultará más fácil ver de qué manera el autor ha hecho uso de ellos.

Casi la mitad de esta obra está dedicada a discutir y refutar las opiniones de otros filósofos y matemáticos. Al hilo de las críticas de otros pensadores, Frege va insinuando ingeniosamente sus concepciones personales, lo cual facilita la eventual presentación de su propia teoría. Mas el objetivo principal de la larga polémica es convencer al lector de la seriedad de los problemas de los que más tarde ofrecerá la solución. Sin este preámbulo, como Frege dice, nos veríamos privados del primer prerrequisito de todo aprendizaje: el saber que no se sabe (FA, Introd., pág. 108).

La revisión de concepciones opuestas está dividida en tres partes dedicadas a tópicos diferentes, aunque relacionados: la naturaleza de las proposiciones aritméticas, el concepto de número y la noción de uno o de unidad.

La cuestión acerca de la naturaleza de las proposiciones aritméticas es expuesta por Frege de la siguiente forma: ¿Son a priori o a posteriori? ¿Sintéticas o analíticas? Aquí está usando Frege términos que recibieron amplia carta de naturaleza en la centuria anterior por Inmanuel Kant.

Según Kant, la distinción entre a priori y a posteriori es primariamente una distinción entre modos de conocer: conocemos una verdad a priori si la conocemos in-

dependientemente de toda experiencia; la conocemos a posteriori si la conocemos mediante la experiencia. La distinción entre analítico y sintético, por otra parte, es una distinción que hace Kant en términos de juicios, y en particular en términos de juicios compuestos de sujeto y predicado. El juicio de que *A* es *B* es analítico si el predicado *B* pertenece al sujeto *A* como algo que está contenido en el concepto *A*, en caso contrario es sintético. Puesto que las dos distinciones están establecidas en términos diferentes —la primera en términos de epistemología y la segunda en términos de lógica—, no podemos asumir que una y otra coincidan; de manera, por ejemplo, que no podemos asumir que todas las proposiciones a priori son analíticas y que todas las proposiciones sintéticas son a posteriori. El propio Kant creía que las dos distinciones no coincidían, pues mantenía que existían cosas tales como juicios sintéticos a priori, y que tales juicios ocupaban un lugar extremadamente importante en toda exposición del conocimiento humano.

Frege adapta las distinciones de Kant a sus propios fines. Para asegurarse de que hablar de «conocimiento a priori» no envuelve la menor confusión entre psicología y lógica, nos recuerda que es posible descubrir el contenido de una proposición antes de dar con una prueba de ella; así pues, hemos de separar el modo en que primeramente llegamos a creer una proposición, y el modo en que eventualmente pudiéramos justificarla. Las distinciones kantianas, tal como aquí las presenta Frege, atañen no al contenido del juicio ni al método de llegar a él, sino a la justificación para emitirlo (FA, pág. 116).

Observemos en primer lugar que *tiene que haber* una justificación, si es que vamos a hablar de conocimiento (sea a priori o a posteriori). Porque, tradicionalmente, la diferencia entre conocimiento y mera creencia reside en que el conocimiento es creencia verdadera y justificada. Hablar de un error a priori, dice Frege, tiene tan poco

sentido como hablar de un concepto azul. Pues conocer a priori es un modo de conocer, y uno sólo puede conocer lo que es verdadero[1].

> Cuando se dice que una proposición es analítica o a posteriori no se juzga, según mi interpretación, sobre las condiciones psicológicas, fisiológicas y físicas que pudieran haber hecho posible la formación de la proposición en nuestra conciencia; tampoco sobre cómo alguna otra persona, tal vez erróneamente, haya llegado a tenerla por verdadera; sino sobre la razón más profunda en que descansa la justificación que la toma por cierta (FA, pág. 117).

Si se trata de una proposición matemática, su justificación tiene que ser matemática, no psicológica. Por tanto, si vamos a establecer que es analítica o sintética, habremos de dar con la prueba y retrotraerla a verdades primitivas. Si en este proceso se encuentran sólo leyes lógicas generales y definiciones cuya permisibilidad está establecida por tales leyes, entonces la verdad es analítica; pero si la prueba envuelve verdades que pertenecen a la esfera de alguna ciencia especial, entonces la proposición es sintética. Y Frege continúa:

> Para que una verdad sea a posteriori se exigirá que su prueba no pueda producirse sin apelar a situaciones fácticas, esto es, a verdades que no se puedan probar y que no sean generales, a verdades que contengan asertos sobre objetos determinados. Si, por el contrario, es posible producir la prueba apoyándose totalmente en leyes generales, que por su parte ni necesitan ni admiten prueba, entonces la verdad es a priori (FA, página 117).

---

[1] ¿Está negando Frege que se pueda conocer a priori que una cierta proposición, digamos $7 + 5 = 3$, es falsa? Seguramente no, pero el conocimiento a priori de que p es falsa es tratado por Frege como conocimiento a priori de que la negación de p es verdadera.

Hemos de leer con gran cuidado este pasaje si queremos ver cuál es para Frege la diferencia entre la distinción a priori/a posteriori y la distinción analítico/sintético. No se trata ya de un asunto de epistemología *versus* lógica: es una cuestión de grado de generalidad. Una verdad es a priori si es demostrable a partir de leyes generales, sin recurso a hechos particulares; una verdad no es solamente a priori, sino también analítica, si las leyes generales desde las que es demostrable son leyes generales de *lógica*. Una ley es una ley lógica si es universalmente aplicable y no está restringida a disciplinas particulares.

Más adelante, en los *Fundamentos* (FA, pág. 193), Frege se alinea con Kant al establecer que las verdades de la geometría son sintéticas y a priori. Esta tesis nos permite ver más claramente cómo entendía Frege las distinciones entre lo a priori y lo analítico. La geometría es a priori, porque los teoremas geométricos son demostrables a partir de leyes generales (por ejemplo, por los axiomas de Euclides) y no tienen que recurrir a líneas, figuras o cuerpos sólidos en particular. Pero la geometría no es analítica, porque sus axiomas envuelven conceptos espaciales; y esos conceptos no son aplicables en todas las disciplinas, puesto que no todo lo que podemos concebir es espacial. Como muestran las geometrías no euclidianas, algunos axiomas geométricos pueden ser negados sin contradecir a los otros ni a sí mismos. Ello, afirma Frege, «muestra que los axiomas de la geometría son independientes unos de otros y de las leyes primitivas de la lógica, y en consecuencia son sintéticos» (FA, pág. 130).

La gran cuestión que Frege se plantea a sí mismo es si la aritmética, al igual que la geometría, depende de leyes específicas no lógicas, o si puede ser probada a partir de puras leyes generales de lógica. Esta cuestión puede ser satisfactoriamente respondida sólo si la aritmética, al igual que la geometría, puede ser adecuadamente axiomatizada, es decir, si se puede mostrar que todas

sus verdades dependen de una serie de verdades primitivas. Cuando se haya hecho esto, será posible ver si esas verdades son todas de carácter general o lógico, o si alguna de ellas contiene conceptos que son irreducibles y peculiares de la aritmética.

Tal vez resulte que el concepto de número tiene un papel en aritmética similar al que los conceptos espaciales tienen en geometría. O quizá —y ésta es la esperanza que mantiene Frege— los números mismos (los cardinales como uno, dos, tres, etc.) resulten ser definibles en términos puramente lógicos. En el primer caso, las verdades de la aritmética serán sintéticas; en el último, serán analíticas.

Bien, ¿puede ser axiomatizada la aritmética? ¿Pueden, por ejemplo, las fórmulas

$$7 + 5 = 12$$
$$135.664 + 37.863 = 173.527$$

e infinitamente muchas otras sumas similares ser reducidas a una colección de verdades evidentes? Frege da por hecho que si la axiomatización va a ser posible, el conjunto de verdades primitivas debe ser lo suficientemente pequeño como para que sea fácilmente revisable. ¿Pueden las infinitas verdades de la aritmética ser reducidas a un grupo manipulable?

La reducción sólo es posible si los números individuales que ocurren en las fórmulas pueden ser definidos. Mucho antes, Leibniz había indicado el modo de realizar esto en un pasaje de sus *Nouveaux Essais* que Frege cita:

> No es una verdad inmediata que 2 y 2 son 4; dando por garantizado que 4 significa 3 y 1, la anterior suma puede ser probada como sigue:
> Definiciones: (1) 2 es 1 y 1
> (2) 3 es 2 y 1
> (3) 4 es 3 y 1

Axioma: Si se sustituyen iguales por iguales, la igualdad permanece.

Pruebas: 2 + 2 = 2 + 1 + 1 (por Def. 1) = 3 + 1 (por Def. 2) = 4 (por Def. 3).

Por tanto, 2 + 2 = 4 (por el Axioma).

Frege observa que la prueba hace un uso tácito del axioma $a + (b + c) = (a + b) + c$, que está encubierto por la falta de paréntesis. Pero si añadimos este axioma, sostiene Frege, podemos ver fácilmente que es posible dar una prueba similar a la de Leibniz para toda fórmula de adición. «Esto significa que todo número se define por medio de su predecesor [...] Por medio de tales definiciones puede reducirse el conjunto infinito de los números al número 1 y al incremento en una unidad; y cada una de las infinitas fórmulas numéricas puede ser probada a partir de unas pocas proposiciones generales» (FA, pág. 120).

En secciones más avanzadas de los *Fundamentos* expone Frege en detalle cómo va a llevar a cabo su programa. Pero antes establece un contraste entre esta concepción leibniziana que él adopta y las concepciones de otros filósofos igualmente ilustres que implicarían un tajante rechazo del programa de axiomatización.

La oposición proviene de dos banderías opuestas: racionalistas y empiristas. Kant consideraba a cada fórmula aritmética como una irreducible verdad sintética, conocida a priori por la intuición. John Stuart Mill coincidía con Kant en que la aritmética era sintética, pero pensaba que era a posteriori: las definiciones de números individuales en el estilo de Leibniz presuponían cuestiones de hecho particulares, que se descubrían por la experiencia. Frege muestra que ni una ni otra posición son sostenibles.

Kant mantiene que cada proposición aritmética es conocida por intuición. Al sumar 7 y 5, nos dice, «llamamos en nuestra ayuda a la intuición correspondiente a uno de ellos, digamos nuestros cinco dedos». «Intuición» parece significar el uso de la imaginación —porque si la intuición envolviera el recurso a la experiencia, entonces

la aritmética sería empírica más bien que a priori. Pero ¿tenemos realmente una intuición de 37.863 dedos? ¿O de 135.664 dedos? Y si las tuviéramos, ¿no sería el valor de 135.664 + 37.863 inmediatamente obvio, sin necesidad de tener que calcularlo?

Tal vez Kant quiera decir que su tesis es aplicable sólo a números pequeños. Pero incluso en el caso de diez dedos, cabe producir en la mente muchas imágenes diferentes según el posicionamiento de los dedos. Y ¿cómo establecer una fundamental distinción entre números pequeños y grandes? Si las fórmulas que encierran números mayores que diez son demostrables, ¿por qué no las fórmulas con números más pequeños?

Frege vuelve su atención de Kant a Mill. En su *Sistema de Lógica,* Mill había mantenido que la definición de cada número envolvía la aserción de un hecho físico:

> Cada uno de los números dos, tres, cuatro, etc., denota fenómenos físicos, y connota una propiedad física de esos fenómenos. Dos, por ejemplo, denota todos los pares de cosas, y doce todas las docenas de cosas, y connotan todo lo que los hace ser pares o docenas: y eso que los hace ser así es algo físico; puesto que no puede ser negado que dos manzanas son físicamente distinguibles de tres manzanas, dos caballos de un caballo, y así sucesivamente: es evidente que todos ellos son un fenómeno visible y tangible distinto (SL, III, 24, 5).

Mill encuentra ciertas dificultades en decir con claridad cuál es exactamente la propiedad física connotada por el nombre de un número, y tiene que reconocer que los sentidos no pueden distinguir entre ciento dos caballos y ciento tres caballos con la misma facilidad con que lo hacen entre dos caballos y tres. Pero concluye que la propiedad connotada por los nombres de números tales como tres y cuatro es

> alguna propiedad que pertenece a la aglomeración de cosas que nosotros mentamos por el nombre; y esta

propiedad consiste en la manera característica en que la aglomeración ha sido formada a base de, y es separable en, partes (SL, III, 24, 5).

En el caso del número tres, esta propiedad es ilustrada diciendo:

> Existen colecciones de objetos, que aunque impresionan a los sentidos así ∴ pueden ser separadas en dos partes así ·· · . Estando garantizada esta proposición, adjudicamos el término Tres a todas las parcelas de este tipo (SL, II, 6,2).

Es una suerte, comenta Frege, que no todo en el mundo se halle cosido y remachado, porque si así fuera no podríamos separar las partes, ¡y dos y uno no serían tres!

Pueden ponerse objeciones a la propuesta de Mill que son muy paralelas a las planteadas a las tesis de Kant. No podemos señalar ningún hecho físico que esté aseverado en la definición del número 777.864, como tampoco podemos remitirnos a una intuición de ese número. Según la concepción de Mill, alguien que pudiera calcular con nueve cifras tendría que poseer un asombroso conocimiento de la física, al igual que en la concepción de Kant una tal persona tendría que estar dotada de una imaginación extraordinariamente vívida. Mill no está más autorizado que Kant para sostener que los números grandes sean tratados de modo distinto a los pequeños: si podemos formar el 11 a partir de 10 y 1 simplemente por definición, sin haber visto la correspondiente colección de objetos, no hay razón para que no podamos construir similarmente el 2 a partir de 1 y 1.

Tanto Kant como Mill explican el número recurriendo a características de los agregados; la única diferencia está en que Mill está pensando en la visión real, y Kant en la imaginación visual. Pero tal aproximación olvida la

universal aplicabilidad del número. Si se la tomara literalmente, significaría que sería incorrecto hablar de tres tañidos de campana, o de tres métodos de resolver una ecuación.

Ni Kant ni Mill aportan una alternativa seria al programa leibniziano de establecer las verdades aritméticas derivándolas, mediante definiciones, de unas cuantas proposiciones iniciales. Pero incluso aunque adoptemos ese programa, quedará abierta la cuestión de si las proposiciones iniciales (e igualmente los teoremas demostrables a partir de ellas) son, a posteriori o a priori, analíticas o sintéticas. Mill podría haberse equivocado al rechazar la construcción de números por definición y, sin embargo, estar en lo cierto al mantener que la aritmética es esencialmente una ciencia empírica.

Mill sostiene, por ejemplo, que un principio como «las sumas de iguales son iguales» es una verdad inductiva o ley de la naturaleza del más alto rango. Las verdades inductivas son generalizaciones basadas en instancias individuales. De acuerdo con Mill, la afirmación de tales verdades tiene siempre que ser en alguna medida tentativa o hipotética. Pero seguramente «las sumas de iguales son iguales» es algo categóricamente cierto: ¿cómo puede ser entonces una verdad inductiva?

La respuesta de Mill es que el principio contiene un elemento hipotético: la suposición de que todos los números involucrados son números con las mismas o iguales unidades.

> Esto no es nunca rigurosamente cierto, porque ninguna medida de peso real es exactamente igual a otra, ni una milla medida tiene absolutamente la misma longitud que otra; un balance más afinado, o instrumentos de medición más certeros detectarían siempre alguna diferencia (SL, II, 6, 3).

Frege replica que Mill está confundiendo aquí a la aritmética con sus aplicaciones. Si vertimos 2 unidades de volumen de un líquido en otras 5 unidades de líqui-

do, tendremos 7 unidades de volumen de líquido. Pero esto no es el significado de la proposición 5 + 2 = 7, sino una aplicación de ella. Además, se trata de una ley que sólo es válida en ciertas circunstancias físicas —en ausencia, por ejemplo, de una reacción química que altere el volumen. La pura proposición aritmética es algo bastante diferente de las aplicaciones que puedan hacerse de ella, que a menudo son proposiciones físicas y presuponen hechos observados. La aritmética puede ser aplicada a la física, pero no puede estar basada en la física, puesto que es aplicable a muchas otras cosas que no son objetos físicos.

Si las leyes aritméticas fueran inductivas, las instancias de las cuales tendrían que ser derivadas habrían de ser ellas mismas inductivas. Pero estaríamos moviéndonos en un círculo vicioso si intentaramos establecer axiomas de aritmética basándonos en fórmulas aritméticas individuales y establecer fórmulas individuales por recurso a los axiomas.

Además, el método inductivo envuelve generalizaciones de instancias similares. Pero los números individuales varían grandemente entre sí: unos son impares, otros pares, algunos son cuadrados, otros cubos, etc. ¿Cómo podríamos hacer generalizaciones fiables de tal mezclado bagaje de instancias? Al realizar inducciones asumimos que una posición en el espacio o el tiempo es tan válida como cualquier otra: dos instancias no diferirán entre sí simplemente porque ocurran en diferentes tiempos o en diferentes lugares. Pero la posición en la serie numérica no es materia de indiferencia como lo es la posición en el espacio, pues es propio de la naturaleza de los números el estar sujetos a un orden fijo. Cada número está formado de su propia manera y tiene sus propias peculiaridades, que, afirma Frege, son «especialmente prominentes en los casos de 0, 1 y 2».

Tratar de establecer la aritmética por inducción es poner el carro delante del caballo. La inducción científica depende de la teoría de la probabilidad. Pero la teo-

ría de la probabilidad no habría podido ser desarrollada jamás sin presuponer las leyes aritméticas.

La aritmética no es, por tanto, una ciencia empírica; tampoco es a posteriori. Pero si es a priori, ¿es sintética o analítica? Kant mantenía que la aritmética, al igual que la geometría, es sintética a priori. Pero Frege piensa que la similaridad entre aritmética y geometría es comúnmente sobreestimada. Como ya ha sido observado, un punto geométrico, una línea o un plano, considerados en sí mismos, son indistinguibles unos de otros; en cambio, cada número tiene sus propias peculiaridades. Sólo cuando varios puntos, líneas o planos, están reunidos en una única intuición es posible distinguirlos entre sí. En geometría, por tanto, es perfectamente inteligible que las proposiciones generales sean derivadas de la intuición. Y el dominio de la geometría es precisamente el ámbito de lo que es espacialmente intuible, sea real o imaginario.

> Las más extravagantes fantasías de la fiebre, las más audaces invenciones de la leyenda y la poesía, en donde los animales hablan, las estrellas se detienen permanentemente, las piedras se convierten en hombres y los hombres en árboles, en donde se surge de los pantanos tirándose de los propios cabellos; todo esto, en tanto que siga siendo algo intuible, queda sujeto a los axiomas de la geometría. El pensamiento conceptual sólo puede librarse de este yugo cuando asume, digamos, un espacio de cuatro dimensiones o una curvatura positiva. El estudio de tales concepciones no es en manera alguna inútil; pero abandona totalmente el suelo de la intuición. Si también aquí hacemos uso de ella, la intuición siempre lo es de un espacio euclidiano, único espacio del que podemos tener imagen alguna. Sólo que la intuición no será tomada ahora en cuanto tal, sino como símbolo de alguna otra cosa; por ejemplo, denominamos recto o plano a lo que de hecho intuimos como curvo (FA, págs. 129-30).

La aritmética tiene un dominio aún más amplio que el de la geometría, la psicología o la física. La física y la

psicología tratan del mundo o realidad activa o «efectiva», de causas y efectos *(Wirklichkeit);* la geometría, del mundo de lo imaginable; la aritmética se ocupa del mundo del pensamiento. Todo lo que es pensable es también enumerable; y las leyes del número no pueden ser negadas sin poner en cuestión las leyes del pensamiento. De aquí, concluye Frege, que las bases de la aritmética estén arraigadas en un nivel más profundo que las de cualquier otra ciencia, incluyendo la geometría. La propuesta de Frege es que las verdades aritméticas no son sólo a priori, sino también analíticas. Las verdades de la aritmética están relacionadas con las verdades de la lógica del mismo modo en que los teoremas de Euclides lo están con sus axiomas.

Esta propuesta puede parecer chocante. ¿Cómo es posible que el vasto árbol de la ciencia del número esté enraizado en desnudas identidades? ¿Puede un contenido tan rico ser extraído del vacío cascarón de la lógica? Como decía Mill, «la doctrina de que nosotros podemos descubrir hechos, detectar los ocultos procesos de la naturaleza, mediante una hábil manipulación del lenguaje, es tan contraria al sentido común, que a una persona le sería preciso tener conocimientos de filosofía para creerla» (SL, II, 6, 2).

Pero quien mantiene, como Frege, que la aritmética es derivable de la lógica no quiere decir con ello que las verdades aritméticas sean verdades acerca de meros símbolos. Los símbolos tienen un contenido, que se hace perceptible a través de ellos; pero el contenido de los símbolos no es intuible o percibible por los sentidos según Frege. Esto es válido tanto para las verdades de la aritmética como para las de la lógica; y si las primeras pueden además ser derivadas de las últimas, entonces «el prodigioso desarrollo de los estudios en aritmética, con sus innumerables aplicaciones, bastará para poner fin al extendido desprecio por los juicios analíticos y a la leyenda de la esterilidad de la lógica pura».

Frege se vuelve ahora hacia una consideración gene-

ral del concepto de número cardinal. Es bastante verosímil que cada número individual pueda ser definido en términos del número uno y de la noción de incremento en uno. Pero estos elementos tendrán que ser definidos a su vez; y en la derivación se hará uso de proposiciones generales, que igualmente habrán de ser derivadas del concepto general de número. ¿Qué es, pues, el número?

¿Es una propiedad de las cosas externas? Las palabras que expresan números aparecen a menudo como adjetivos: hablamos de tres caballos o de cuatro caballos, del mismo modo que lo hacemos de caballos negros y caballos blancos, y esto parece sugerir que el número es una propiedad de las cosas al igual que lo es el color. Cuando decimos «cuatro caballos de pura sangre» parece como si «cuatro» modificara a «caballo de pura sangre» del mismo modo en que «de pura sangre» modifica a «caballo» (FA, pág. 163).

¿Podemos realmente alinear al número con propiedades tales como color y solidez? El color y la solidez son perceptibles por los sentidos, y Mill había argumentado que el número era también una propiedad perceptible por los sentidos. Dos manzanas, decía Mill, son físicamente diferentes de tres manzanas, y dos caballos son un fenómeno físico y tangible que es diferente de un caballo. Pero de esto no podemos inferir que la paridad o la trinidad sean algo físico: *un* par de botas puede ser el mismo fenómeno tangible y visible que *dos* botas. Por otra parte, un hombre puede tener dos caballos, uno en Alemania y otro en América; y si esos dos caballos no son reunidos jamás no formarán en absoluto un «fenómeno físico y tangible».

Mill había mantenido que el número era una propiedad de un agregado de cosas, una propiedad que consistía en «la manera característica de haberse formado el agregado, y que puede ser separado en partes». Pero no hay *un único* modo característico de separar un agregado: un haz de paja puede ser separado en partes cor-

tando todas las pajas por la mitad, separándolas una por una, o dividiendo el haz en dos haces. Además, las cosas no tienen en absoluto que estar aglomeradas para que puedan ser contadas. No tenemos que reunir a todos los ciegos que haya en Alemania para dar sentido a la expresión «El número de gente ciega en Alemania». Mil granos de trigo diseminados por el sembrador siguen siendo mil granos.

La dificultad de considerar al número como una propiedad física resulta particularmente clara en el caso del número uno. La sugerencia más plausible de las que han sido propuestas es que ser uno significa ser indiviso y aislado. Si esto fuera así, dice Frege, entonces cabría esperar que los animales tuvieran la idea de unidad: un perro que mira a la luna puede ver que está aislada, y puede distinguir objetos individuales tales como su amo u otro perro. Pero ¿puede realmente un perro tener un concepto del número uno?

> Sin duda notará una diferencia si se tiene que defender contra muchos perros o sólo contra uno, pero esto es lo que Mill llamó diferencia física. En especial, la cuestión es: ¿tiene el perro conciencia, aunque sea confusa, de aquéllo común que expresamos por medio de la palabra «uno» en situaciones diferentes, por ejemplo cuando es mordido por un gran perro y cuando está persiguiendo a un gato? Me parece improbable (FA, pág. 146).

Propiedades tales como la de ser indiviso o ser aislado, que el animal percibe al igual que nosotros, no puede ser lo esencial del concepto matemático de unidad.

Los argumentos que Frege dirige contra Mill logran mostrar que el número no es una propiedad física o tangible de las cosas ni de los agregados de cosas. Pero parecen dejar abierta la posibilidad de que el número pudiera ser otro tipo de propiedad de las cosas, aunque no de una propiedad perceptible por los sentidos.

Es cierto, como afirma Frege, que el número difiere de

propiedades como el color o la solidez por su aplicabilidad en un dominio muchísimo más amplio. Al resumir en otro lugar el argumento que acabamos de exponer, dice Frege: «podemos contar cualquier cosa que sea objeto del pensamiento: lo ideal al igual que lo real, conceptos y objetos, entidades temporales y espaciales, sucesos y cuerpos, métodos y teoremas». Pero esto no parece ser un argumento muy convincente para mostrar que el número no es una propiedad de las cosas. ¿Por qué no podría haber algunas propiedades que fueran aplicables a muchos y diferentes géneros de cosas? Frege argumenta, en contra de la tesis de que «uno» sea una palabra denotativa de una propiedad, que sería sorprendente que cada cosa singular poseyera semejante propiedad.

> No se comprendería por qué en general se aplica expresamente esa propiedad a una cosa. Sólo en virtud de la posibilidad de que algo no sea sabio, cobra sentido la afirmación de que Solón es sabio. El contenido de un concepto disminuye cuando aumenta su extensión; si ésta llega a abarcarlo todo, entonces tiene que desvanecerse por completo el contenido (FA, pág. 144).

Este pasaje es difícilmente conciliable con algunas de las cosas que Frege dice en otro lugar acerca de la naturaleza de los conceptos. Está dispuesto a considerar como una propiedad el *ser idéntico a sí mismo* (FA, pág. 182). Si es una propiedad, se trata con seguridad de una propiedad de aplicación universal: toda cosa es idéntica a sí misma. Así pues, ni en el caso de «uno» ni en el de cualquier otro número, el rango de aplicabilidad no parece establecer que el número no sea una propiedad.

Pero Frege cuenta con otros y mejores argumentos para mostrar la diferencia entre números y propiedades tales como el color. Decimos de un árbol que tiene 1000 hojas y que sus hojas son verdes; mas con esta diferencia: mientras que cada hoja es verde, cada hoja no

es 1000. Las hojas forman colectivamente el follaje del árbol; el follaje, al igual que las hojas, es verde, pero, nuevamente, el follaje no es 1000. Así, el número 1000, considerado como una propiedad, no parece que pertenezca ni a una simple hoja ni a la totalidad de todas ellas.

Si entrego a alguien una piedra y le pido que me diga su peso, esa persona sabe con precisión lo que tiene que investigar. Pero si le doy un puñado de naipes y le pido que me diga el número, necesita saber si lo que yo le pido es el número de cartas, o el de juegos completos, o el de palos. El color pertenece a una superficie con independencia de cualquier elección nuestra; pero el número 2 o el 104 no pertenecen a la pila de cartas por derecho propio, sino en función del modo en que hayamos elegido considerarla.

> Lo que quisimos llamar juego completo es obviamente una decisión arbitraria, y el montón de cartas nada sabe de ello. Pero cuando lo consideramos bajo esta perspectiva, tal vez descubramos que lo podemos llamar dos juegos completos. Alguien que no supiera lo que se llama juego completo, probablemente descubriría cualquier otro número en el montón antes que el dos (FA, pág. 136).

Mientras yo no puedo alterar el color de una cosa por el mero hecho de pensar en ella de uno u otro modo, puedo pensar la *Ilíada* como un poema, o como 24 libros, o como 115.477 palabras. Del *Ensayo sobre una nueva teoría de la visión* de Berkeley, cita Frege estas palabras: «La unidad varía según el modo en que la mente combina variadamente sus ideas; y con la unidad, varía igualmente el número, que es sólo una colección de unidades. Llamamos una a una ventana, a una chimenea, y hasta una casa en la que hay muchas ventanas y muchas chimeneas tiene el mismo derecho a ser llamada una, y muchas casas componen una ciudad.»

Si el número no es una propiedad de las cosas, ¿sig-

nifica esto que se trata de algo subjetivo, un producto de procesos mentales? De ser así, formaría parte del objeto de la psicología, cosa que Frege rechazaba tajantemente. Del hecho de que el número que vaya a ser atribuido a una cosa en el mundo tenga que depender de una anterior decisión nuestra, es erróneo concluir que el número no es algo objetivo. El número no es más un producto de procesos mentales de lo que lo es el Mar del Norte. Es asunto de nuestra arbitraria elección decidir qué porción de agua va a ser llamada «El Mar del Norte», pero eso no convierte al Mar del Norte en objeto de la psicología en lugar de la geografía.

> Si decimos que «El Mar del Norte tiene 10.000 millas cuadradas de extensión», entonces ni con el término «Mar del Norte» ni con el de «10.000» nos estamos refiriendo a ningún estado o proceso de nuestra mente: por el contrario, estamos afirmando algo muy objetivo, que es independiente de nuestras ideas y de cualquier cosa de este tipo (FA, pág. 140).

En el sentido de Frege, algo puede ser objetivo sin ser tangible, o espacial, o causalmente operativo. Los ejes de la Tierra y el ecuador son objetivos, pero no son objetos tangibles. Números y colores son igualmente objetivos, aunque sólo los colores son perceptibles por los sentidos.

La idea de que los números son subjetivos, como una imagen mental, conduce a resultados absurdos. Las imágenes mentales son privadas en el sentido de que mis imágenes mentales no son las tuyas, ni tus imágenes son las mías. Si el número dos tuviera el carácter de una imagen mental, entonces tendría que ser algo privado de los individuos.

> Quizá tuviéramos entonces muchos millones de doses. Habría que hablar de mi dos, tu dos, un dos, todos los doses... Con las nuevas generaciones de seres humanos surgirían invariablemente nuevos doses, y

quién sabe si al cabo de milenios se transformarían hasta el extremo de que llegase a darse que dos por dos es igual a cinco (FA, pág. 142).

Y muchos numerales se tornarían tal vez en símbolos vacíos. ¿Cómo podríamos estar seguros, por ejemplo, de que existe en la mente de alguien la imagen correspondiente al símbolo de diez elevado a diez? «Sería chocante», concluye Frege, «que la más exacta de todas las ciencias tuviera que buscar apoyo en la todavía insegura y vacilante psicología».

Frege pasa ahora a considerar la sugerencia de que un número sea un conjunto. Y observa que si se toma el concepto de «conjunto» como equivalente al de «multitud» o «pluralidad», entonces la definición no cubriría los números 0 y 1. «La palabra 'conjunto'», advierte Frege, «evoca de inmediato la imagen de un montón de cosas en el espacio, como evidencia la expresión 'pila de platos'; y así, como hace J. S. Mill, uno retiene fácilmente la concepción infantil del número mismo como montón o agregado.» Sin embargo, posteriormente se verá que el propio Frege concibe el número como un conjunto, con lo cual esa propuesta no es de las que puedan ser descartadas sin más. La primera cuestión es: ¿*De* qué cosas es un conjunto el número? La respuesta tradicional a esta pregunta, dada por primera vez por Euclides, es que un número es un conjunto de unidades. Necesitamos, por tanto, preguntar qué es una unidad. ¿Es «unidad» sinónimo de «cosa», si toda y cada cosa es una unidad o puede ser considerada como una?

Frege dice que una respuesta común entre los filósofos es que cuando describimos dos elementos que van a figurar como «unidades» les estamos adscribiendo una cierta identidad entre sí. Si vamos a contar cosas, continúa la teoría, tenemos que ignorar todo lo que las diferencia y tratarlas como exactamente similares. Pero, objeta Frege, si abstraemos las características que diferencian a las cosas, nos quedamos no con el número de las

cosas consideradas, sino con un concepto general bajo el cual todas ellas caen.

> Cuando, por ejemplo, al considerar un gato blanco y uno negro prescindo de las propiedades por las que se distinguen, obtengo presumiblemente el concepto «gato». Si procedo ahora a reunirlos bajo este concepto y eventualmente los llamo unidades, el gato blanco sigue siendo blanco y el negro negro. Puedo no pensar en sus colores, o no proponerme sacar ninguna conclusión de su diferencia: los gatos no van a perder su color y siguen siendo tan diferentes como antes (FA, pág. 148).

Si para convertirse en unidades enumerables, dos cosas tienen que ser idénticas en todos los respectos, entonces no habría unidades en absoluto, pues no hay dos cosas que sean exactamente iguales.

De hecho, no es cierto que dos unidades tengan que tener todas sus propiedades en común para ser enumerables. Lo que sí *es* cierto es que en orden a ser reunidas, dos cosas tienen que caer bajo un solo concepto (como los dos gatos caen bajo el único concepto *gato);* y esto es algo a lo que Frege recurrirá cuando ofrezca su propia concepción de número[2]. Lo cual es bastante diferente de decir que las unidades tienen que ser totalmente iguales.

No es fácil seguir el curso del pensamiento fregeano en este contexto, pues la palabra alemana «*Gleichheit*», que Frege utiliza para la propiedad que se adscribe a las unidades, puede significar «identidad», «igualdad», o «similaridad». A veces su texto es más convincente si traducimos el adjetivo «*gleich*» por «idéntico», y otras veces por «semejante». Ello puede inducir a pensar que su argumento es equívoco. Pero en realidad, esta ambigüedad no es

[2] Frege cita el pasaje de Spinoza que dice que quien tiene en la mano un tálero y un sestercio no pensará en el número dos a menos que pueda cubrir este tálero y este sestercio con uno y el mismo nombre, a saber, «monedas» (FA, pág. 161).

dañina. Porque Frege acataba el principio leibniziano de la identidad de los indiscernibles: el principio que dice que no hay dos cosas que tengan todas sus propiedades en común[3]. Si se acepta esto, se sigue entonces que si todo lo que sea verdadero de *A* es verdadero de *B*, entonces *A* es idéntico a *B*. Bajo este principio, la similaridad total entre unidades equivaldría a la identidad. De aquí que Frege pueda resumir esta objeción así: «Si a las cosas por enumerar se las llama unidades, entonces la aserción de que las unidades son absolutamente iguales es falsa. Que son iguales en un cierto respecto es ciertamente correcto, pero carece de interés» (FA, pág. 158).

Algunos filósofos han tomado como rasgo esencial de las unidades no la similaridad, sino la diversidad. Y Frege cita las siguientes palabras de W. S. Jevons: «Frecuentemente se ha dicho que las unidades son unidades en razón de ser perfectamente similares unas respecto a otras; pero aunque puedan ser perfectamente similares en algunos aspectos, deben ser diferentes al menos en un punto, de otra manera no admitirían la pluralidad. Si tres monedas fueran tan similares que ocuparan el mismo lugar al mismo tiempo, no serían tres monedas, sino una» (FA, pág. 149).

Mas la insistencia en que las unidades deben ser diferentes tropieza con tantas dificultades como la exigencia de que las unidades hayan de ser similares. Si se considera a 5 como un conjunto de cinco unidades, cabría denotarlo mediante el símbolo «1+1+1+1+1».

---

[3] Frege continuó aceptando esta interpretación de la igualdad a lo largo de su vida. Así, en el segundo volumen de los *Grundgesetze der Arithmetik*, escribía: «Con respecto al signo *igual* seguiremos manteniendo nuestra convención de que la igualdad es coincidencia completa, identidad. Los cuerpos con igual volumen no son, por supuesto, idénticos, pero tienen el mismo volumen. Los símbolos que flanquean al signo *igual* tienen que ser tomados en este caso no como signos de esos cuerpos, sino de sus volúmenes, o de los valores numéricos obtenidos por medición en términos de la misma unidad de volumen.»

Pero las unidades de las que 5 está compuesto tienen que ser consideradas como distintas entre sí; por ello el símbolo podría ser más adecuado si, siguiendo una ulterior sugerencia de Jevons, escribiéramos «1'+1''+1'''+1''''+1'''''». Aquí, el repetido uso de «1» daría cuenta de la similaridad entre las unidades, mientras que los apóstrofos representarían la diferencia. Por desgracia, comenta Frege, el último símbolo anula la obra del primero. No hay razón alguna para no haber escrito en su lugar «*a*+*b*+*c*+*d*+*e*». «Por tanto», dice Frege, «nuestro uno se nos escapa entre los dedos; nos vuelven a quedar los objetos con todas sus particularidades». Nada hemos ganado con llamar «unidades» a los objetos.

El símbolo «1» en la notación de Jevons significaba el número uno; pero el número uno es cosa muy diferente de una unidad o cosa enumerable. Sólo hay un número uno; «1» es un nombre propio que no admite plural, al igual que no lo admiten «Federico el Grande» o «el elemento oro». «1» no puede ser considerado como un símbolo para diferentes y distintos objetos, como Islandia, Aldebarán, Solón y cosas similares. Usar el mismo símbolo para indicar una unidad y para representar al número uno, como hace Jevons, es sencillamente absurdo.

Para explicar el modo en que, en unidades numéricas, la distinguibilidad va a ser combinada con la similaridad, Jevons introduce la noción de abstracción numérica.

> Ésta consiste en hacer abstracción del signo de la diferencia, de la cual surge la pluralidad, y retener solamente el hecho de la diferencia. Cuando hablo de *tres hombres* no necesito especificar inmediatamente las notas por las que cada uno puede conocer a cada uno de ellos. Esas notas deben existir si son realmente tres hombres y no uno y el mismo, y al hablar de ellos como varios estoy implicando la existencia de las requeridas diferencias. El número abstracto es, así, la *forma vacía de la diferencia* (FA, pág. 156; extraído de *The Principles of Science*, Londres, 1874, pág. 156).

Frege observa que si esto significa que tenemos que formar primeramente una totalidad y luego abstraer las propiedades distintivas de sus elementos constituyentes, es difícil ver cómo podríamos llegar a un número como 10.000, porque estaría más allá de nuestras capacidades captar de un golpe tal multitud de diferencias y retener el hecho de su existencia. ¿Qué se quiere decir con «la forma vacía de la diferencia»? ¿Que una proposición como «*a* es diferente de *b*» nos da el número 2? «La Tierra tiene dos polos» tiene que significar algo bastante diferente de «El Polo Norte es diferente del Polo Sur», como puede comprobarse si observamos que cualquiera de las dos proposiciones podría ser verdadera sin necesidad de la otra.

¿Cómo van a darnos la abstracción numérica los números 0 y 1? Si consideramos la Luna, tal vez podamos llegar por un proceso de abstracción a una variedad de conceptos, por ejemplo, satélite de la Tierra, cuerpo celeste, cuerpo, etc. Pero por este camino no llegaremos jamás al número 1, pues no se trata de un concepto bajo el que la Luna caiga, como cae bajo los conceptos de *satélite* y de *cuerpo*. La cuestión se oscurece aún más en el caso de 0, donde no hay ningún objeto desde el que se inicie nuestro proceso de abstracción. Y de nada sirve decir que 0 y 1 no son números en el mismo sentido en que lo son 2 y 3. Todo lo que sea capaz de responder a la pregunta «¿Cuántos?» cuenta como número, y 0 es una respuesta perfectamente buena a la cuestión «¿Cuántas lunas tiene tal y tal planeta?»

Tres teorías han sido hasta aquí examinadas y juzgadas deficientes: que el número es una propiedad de las cosas, que el número es una creación subjetiva, y que el número es un conjunto de unidades. Ninguna de estas teorías aporta una respuesta a la cuestión. Cuando establecemos algo sobre un número, ¿de qué entidad estamos afirmando algo?

En la sección 46 de los *Fundamentos* comienza Frege a exponer su propia respuesta partiendo de las observaciones anteriormente utilizadas para refutar la idea de

que el número era una propiedad de las cosas físicas o fenómenos.

> Cuando al examinar uno y el mismo fenómeno externo, puedo decir con igual verdad: «esto es un grupo de árboles» y «estos son cinco árboles», o «aquí hay cuatro compañías» y «aquí hay 500 hombres», no se altera ni el individuo ni el todo, el agregado, sino sólo mi denominación. Pero esto es solamente señal de que un concepto ha sido sustituido por otro (FA, pág. 159).

Estas palabras sugieren como respuesta al problema aún no resuelto: el contenido de una proposición numérica es una aserción acerca de un concepto. Lo cual resulta más patente en el caso en que el número en cuestión sea cero.

> Cuando digo «Venus tiene 0 lunas», entonces simplemente no hay ninguna luna, o agregado de lunas de las que pueda decirse algo; pero al concepto «luna de Venus» se le está adscribiendo con ello una propiedad: la de no comprender nada bajo sí (FA, pág. 159).

La tesis de Frege de que una asignación numérica es una proposición sobre un concepto no debería ser malinterpretada como una versión de la tesis de que el número es algo subjetivo. El concepto fregeano es objetivo, no una entidad psicológica semejante a una imagen mental. Además de las proposiciones sobre números, son posibles otras proposiciones sobre conceptos. Por ejemplo, una generalización como «Todas las ballenas son mamíferos» no es una proposición sobre animales, sino una aserción de la subordinación del concepto de *ballena* al concepto de *mamífero*.

> Aunque nuestra proposición sólo pudiera justificarse por medio de la observación de animales individuales, ello nada probaría respecto a su contenido. Para responder a la pregunta ¿de qué trata esa proposición?, es

indiferente que ésta sea o no verdadera, como también las razones que nos asistan para sostener su verdad. Así pues, si el concepto es algo objetivo, entonces un enunciado sobre él puede contener también algo fáctico (FA, pág. 160).

Frege procede ahora a mostrar que una buena parte de las misteriosas características reveladas en la anterior discusión, queda fácilmente explicada si aceptamos que un enunciado sobre un número es una aserción sobre un concepto. Los anteriores ejemplos inducían a pensar que una cosa podía tener más de un número; pero tan pronto comprendemos que los números atañen a los conceptos, no a las cosas, hallamos que los números son mutuamente exclusivos. Un concepto no puede admitir la asignación de dos números diferentes, al igual que un objeto no puede ser absolutamente rojo y verde a la vez.

Pensar que los números son obtenidos por abstracción es un error; lo más que podemos decir es que los números pertenecen a los conceptos, y que los conceptos pueden ser adquiridos mediante la abstracción. De aquí que la abstracción preceda con frecuencia al juicio sobre el número. Pero la abstracción no es ciertamente el único modo de formar conceptos: podemos adquirirlos combinando características definidas, y en tal caso puede suceder que no haya nada que caiga bajo el concepto. De no ser así, jamás podríamos construir verdaderas negaciones de existencia como «No existen unicornios».

Parecía evidente que el número podía ser predicado de objetos físicos y de objetos mentales, de lo temporal y de lo eterno. Pero esto no es lo que sucede realmente en las proposiciones numéricas. Los números no son asignados a esa diversidad de objetos, sino a los conceptos que los engloban.

Que un objeto caiga bajo un concepto no significa que la palabra que designa el concepto sea el nombre de la cosa. Félix es un gato, y cae bajo el concepto *gato*; pero su nombre no es «gato». Frege admite que lo llamemos «el gato», pero aclara que una palabra-concepto acompañada

de un artículo definido se torna en nombre propio y deja de ser una palabra-concepto.

> Un concepto no deja de ser concepto porque bajo él caiga solamente una cosa, la cual se encuentra plenamente determinada por él. A tal tipo de conceptos (por ejemplo, satélite de la Tierra), pertenece justamente el número 1, que es un número en el mismo sentido que 2 y 3. En relación a un concepto, la cuestión es siempre si hay alguna cosa, y si es así qué cosa, que caiga bajo él (FA, pág. 162).

Cuando Frege dice que el número es una propiedad de un concepto, o más correctamente que una proposición numérica asigna una propiedad a un concepto, es importante no olvidar que Frege establece una distinción sistemática entre una propiedad de un concepto y un componente *(Merkmal)* de un concepto. *Rectángulo* es un componente del concepto *triángulo rectángulo*, pero no es una propiedad de ese concepto: es una propiedad de los triángulos que caen bajo él. Pero la proposición de que no existen triángulos equiláteros rectángulos establece una propiedad del concepto *triángulo equilátero rectángulo:* le asigna el número cero (inexistencia).

En un pasaje de gran importancia filosófica (FA, páginas 163-4) propone Frege una analogía entre la existencia y el número. «La afirmación de existencia», nos dice, «no es otra cosa que la negación del número cero». Lo que quiere decir con esto es que una afirmación de existencia (por ejemplo, «Los ángeles existen», o «Existen [cosas tales como] los ángeles») es la aserción de que un concepto tiene algo que cae bajo él. Y decir que un concepto tiene algo que cae bajo él es decir que el número que pertenece a ese concepto es distinto de cero.

En que la existencia sea una propiedad de los conceptos, dice Frege, está la razón de la debilidad del argumento ontológico sobre la existencia de Dios. Lo cual quiere decir que «existe Dios» no puede ser un componente del concepto *Dios*, como tampoco puede ser un

componente de ese concepto que «existe un solo Dios». Pero si de hecho hay un, y solamente un, Dios, eso, en la terminología fregeana, es una propiedad del concepto *Dios.*

Aunque el argumento ontológico sea inválido, la razón de su invalidez no reside en que nunca sea posible realizar una inferencia desde los componentes de un concepto a sus propiedades. El mismo Frege acaba de inferir desde los componentes del concepto *triángulo equilátero rectángulo* que éste tiene la propiedad de poseer el número cero. Tal vez pueda haber también casos en los que sea posible inferir la existencia o la unicidad a partir de las características que componen un concepto. Pero lo que sí es cierto es que esto no puede convertirse jamás en una cuestión tan sencilla como la de asignar como propiedad de un objeto que cae bajo un concepto una de las características componentes de ese concepto (por ejemplo, decidir que una figura que cae bajo el concepto de *triángulo rectángulo* es triangular).

Por otra parte puede haber conceptos que incluyan entre sus componentes la existencia y la singularidad. Mas en este caso se trataría de conceptos de un tipo especial; Frege introduce el nombre de «conceptos de segundo orden» para denotarlos. Supóngase que reunimos bajo un único concepto a todos los conceptos que engloban solamente un objeto; en tal caso, la unidad, en el sentido de unicidad, sería un componente de este nuevo concepto. Bajo él caería el concepto *luna de la tierra*, aunque no la Luna misma. «De este modo», dice Frege, «podemos hacer que un concepto caiga bajo otro de rango superior, o, por así decirlo, concepto de segundo orden». Esta relación es muy diferente de la de la subordinación de la especie al género (por ejemplo, la relación del concepto *luna* con la del concepto *satélite).*

Podemos ofrecer un sentido de «unidad» que dé cuenta de las aparentemente irreconciliables propiedades que habría que utilizar si el número tuviera que ser definido

en términos de unidades. ¿Por qué no decir que un concepto es la unidad relativa al número que pertenece a ese concepto?[4].

Ahora es posible dar una respuesta definitiva a la cuestión de si las unidades son indiscernibles o indistinguibles. En la proposición «Júpiter tiene cuatro lunas», las unidades son idénticas, en el sentido de que la unidad es el concepto singular *luna de Júpiter*. Bajo este concepto están englobadas las cuatro lunas I, II, III, IV. La unidad con la que se relaciona I es idéntica a la unidad con la que se relaciona II, y lo mismo ocurre con las restantes. Pero cuando decimos que las unidades son distinguibles, lo que con ello queremos expresar es que cada una de las lunas, cada una de las cosas enumeradas, es distinguible de las otras. De este modo podemos hacer justicia a cada una de las aparentemente irreconciliables demandas: que las unidades deban ser idénticas, y que deban ser distinguibles.

---

[4] No todo concepto se deja medir por unidades: el concepto perro sí, porque «contar los perros» tiene sentido; pero no ocurre así con el concepto rojo, porque «contar los rojos» no establece ninguna tarea definida. «Sólo un concepto que delimita claramente lo que cae bajo él y que no admite ninguna división arbitraria, puede constituir una unidad en relación a un número finito» (FA, pág. 164).

CAPÍTULO V

Los fundamentos de la aritmética, II

Con el cuarto capítulo de *Los fundamentos de la aritmética* se inicia un abrupto cambio de ritmo. Hasta el presente, mas sin demorarse en vanas retóricas, Frege ha expuesto informalmente las concepciones erróneas de algunos autores sobre el estatuto de la aritmética, mientras dejaba de paso que sus propias tesis sobre la naturaleza del número fueran emergiendo implícitamente como resultado de su detallada crítica de los otros. Sus argumentos, aunque a menudo intolerantes y a veces sarcásticos, impresionan casi siempre al lector por acertados y convincentes.

Ahora todo esto cambia de repente. El ritmo de la discusión se acelera violentamente; Frege comienza a desarrollar sus propias teorías con rapidez de vértigo. Cuestiones audaces son planteadas sin la menor preparación previa; tesis contra-intuitivas son defendidas apoyándose en el más desnudo esqueleto de argumento.

La sección 55, en particular, produce la impresión de una alocada carrera hacia la conclusión. El concepto general de número ha sido ya definido, o, más bien, hemos sido informados de que el contenido de una proposición numérica es una aserción sobre un concepto. Queda ahora la tarea de definir los números individuales 0 y 1, y la noción de incremento en uno. Pues ya ha

sido acordado que todos los números pueden ser derivados a partir de estos elementos. Sin concedernos un instante de respiro, Frege nos coloca ante los ojos tres definiciones que parecen satisfacer estos requisitos.

(a) El número 0. El número 0 pertenece a un concepto *F* si, sea *a* lo que fuere, *a* no cae bajo *F*.
(b) El número 1. El número 1 pertenece a un concepto *F* si, sea *a* lo que fuere, *a* no cae bajo *F*; pero si *a* cae bajo *F* y *b* cae bajo *F*, entonces es el caso que *a* es lo mismo que *b*.
(c) La definición de *n* + 1 en términos de *n*. El número (*n* + 1) pertenece al concepto *F* si hay un objeto *a* que cae bajo *F*, y es de naturaleza tal que el número *n* pertenece al concepto «cae bajo *F*, pero no es lo mismo que *a*».

Tras haber leído, y digerido, estas definiciones, nos inclinaríamos a esperar que Frege terminara aquí su libro, habiendo completado ya su tarea en este punto. Pero hay dos cosas que ponen al lector en guardia.

En primer lugar está el subtítulo dado a esta primera sección del capítulo: «Cada número individual es un objeto independiente.» Uno se pregunta cómo es posible conciliar esto con la conclusión hasta ahora obtenida en el libro: que el contenido de una proposición numérica es una aserción sobre un concepto. Frege ha establecido una sistemática y consistente distinción entre concepto y objeto. ¿Cómo puede un número ser un objeto si una proposición sobre un número es una aserción sobre un concepto? Es claro que habrá que esperar alguna detallada explicación si hemos de reconciliar estas dos proposiciones.

En segundo lugar, el propio Frege se apresura a advertir que las definiciones ofrecidas no resuelven el problema del número. Pero nuestra confusión aumenta, en lugar de disminuir, con su razonamiento.

> Tomado estrictamente, el sentido de la expresión «el número *n* pertenece al concepto *G*» nos es tan desco-

nocido como el de la expresión «el número $(n + 1)$ pertenece al concepto *F*». Ciertamente, por medio de las dos últimas definiciones podemos decir lo que significa

«El número 1 + 1 pertenece al concepto *F*»,

y luego, utilizando esto, indicar el sentido de la expresión

«El número 1 + 1 + 1 pertenece al concepto *F*»,

etc.; pero por medio de nuestras definiciones jamás podríamos decir —por tomar un ejemplo burdo— si el número Julio César pertenece a un concepto, o si el célebre conquistador de la Galia es un número o no (FA, pág. 166).

La reacción común a la primera lectura de estas palabras es preguntarse qué importancia tiene que la establecida definición no sirva para resolver la cuestión acerca de Julio César. Con seguridad, no es cosa de poca monta haber hallado una definición que sea aplicable a todos los números naturales; si es tambien extensible a otras cuantas cosas, mejor que mejor. Y dado que sabemos con certeza que Julio César no es un número, podemos arriesgarnos a apostar con seguridad que una definición que tan perfectamente captura a los números genuinos, no va a ser aplicable a él también.

Pero tal despreocupación no nos está permitida. Para comprobarlo, considérese un distinto tipo de definición que nos ***hubiera*** permitido decidir la cuestión de si Julio César es un número. Todos estamos familiarizados con definiciones de la forma «Un ser humano es un animal racional»; definición que, en términos de Frege, exhibe los componentes de un concepto. Alguien podría ofrecer una definición de número del mismo estilo, que podría tal vez empezar por «un número es un objeto inmaterial que...». Fuera lo que fuera lo que se dijese a favor o en contra de tal definición, es claro que descartaría a Julio César como número. Porque, siendo un ser humano, Julio César es un animal; y ningún animal es un objeto inmaterial.

Ahora bien, una definición de este tipo se enfrentaría

con una seria objeción si resultara aplicable a cosas que no caen bajo el concepto que pretende definir. Hace largo tiempo que se observó que «bípedo implume» era una definición inadecuada de «humano», puesto que según esa definición un pollo desplumado resultaría ser un ser humano. Es, por tanto, un genuino defecto en la definición de número el hecho de dejar abierta la posibilidad de que Julio César sea un número, aunque podamos saber intuitivamente que tal cosa no es una posibilidad sino un absurdo.

La cuestión es ésta: la definición sugerida nos da un procedimiento para acceder a cada miembro de la serie de números naturales. Por lo aprendido de Leibniz, sabemos que cada número natural es accesible por este procedimiento. Lo que *no* sabemos es que *sólo* los números naturales son accesibles mediante él. Esta laguna de nuestro conocimiento es lo que la invocación de Julio César pretende resaltar.

Además, aunque sepamos que para cada número *n* podemos hallar un concepto *F* tal que *n* pertenezca a él, no podemos sin embargo mostrar que *n* es el único número que pertenece a *F*. «No podemos», dice Frege, «probar, sirviéndonos de las definiciones que hemos propuesto, que si el número *a* pertenece al concepto *F* y el número *b* pertenece al mismo concepto, entonces necesariamente $a = b$». Una vez más, la noción de que dos números diferentes puedan pertenecer a un mismo concepto es tan obviamente absurda, que podríamos vernos tentados a ignorar el hecho de que nuestra definición no lo haya prohibido. Y, nuevamente, esta despreocupación no nos está permitida. Lo que pretendemos captar con estas definiciones es nuestra noción intuitiva de número, noción que incluye precisamente el conocimiento de que un concepto sólo puede tener bajo sí a un único número a un mismo tiempo.

Una buena parte de la aritmética queda fuera del alcance de estas definiciones. Hasta que hayamos probado que a cada concepto sólo le puede pertenecer un único número, no podemos justificar la expresión «*El*

número que pertenece al concepto *F*», y, por tanto, sería imposible probar una identidad numérica. De aquí que Frege concluya:

> Nuestra definición de 0 y de 1 es sólo una ilusión; en verdad, solamente hemos fijado el sentido de
> «el número 0 pertenece a»
> «el número 1 pertenece a»;
> pero nada nos autoriza a distinguir el 0 y el 1 como objetos independientes, reconocibles (FA, pág. 166).

Frege procede ahora a explicar lo que quiere decir al llamar «objeto independiente» a un número, y cómo puede ser reconciliado esto con la tesis de que el contenido de una proposición numérica es una aserción sobre un concepto.

> En la proposición «el número 0 pertenece al concepto *F*», 0 es sólo una parte del predicado (tomando al concepto *F* como el sujeto real). Por esta razón he evitado llamar a un número, tal como 0 o 1 o 2, *propiedad* de un concepto (FA, pág. 166).

Así pues, un número no es para Frege una propiedad de una cosa, ni tampoco una propiedad de un concepto. Un número *n pertenece a* un concepto según esta teoría, pero la propiedad del concepto no es el propio número *n*, sino más bien la propiedad de *que el número n le pertenece a él*. Se nos ha dicho ya (FA, pág. 163) que existencia y unicidad son propiedades de los conceptos. Estas dos propiedades son, por ejemplo, propiedades del concepto *luna de la Tierra*. La terminología es un tanto engorrosa: lo que Frege debería realmente decir es que afirmar la existencia de un objeto, o la unicidad de un objeto, es hacer una aserción no sobre un objeto, sino sobre un concepto. Sin embargo, lo que quiere decir es en este contexto bastante claro: un concepto tiene la propiedad de la existencia si tiene al menos un objeto que cae bajo él (es decir, si no le pertenece el número 0); un concepto tiene la propiedad de

unicidad si, además de tener la propiedad de la existencia, tiene a lo sumo un objeto que cae bajo él (es decir, si le pertenece el número 1). Pero las propiedades del concepto no son los números 1 y 0, sino la de tener el número 1, y la de no tener el número 0.

Un número no es, por tanto, una propiedad; pero ¿qué significa decir que es un objeto independiente? Para empezar, Frege procede a aclarar con sumo cuidado lo que *no* significa. En primer lugar no significa que los números sean objetos espaciales, como la Tierra y la Luna. Pero, como con frecuencia ha insistido Frege, una cosa no tiene que ser espacial para ser objetiva. «De hecho, el número 4 es exactamente el mismo para quienquiera que se ocupe de él; pero esto nada tiene que ver con la espacialidad. No todo lo objetivo ocupa un lugar» (FA, pág. 169). En segundo lugar no significa que podamos tener una imagen mental de un número. Si pensamos en un campo verde y reemplazamos luego el «un» por «uno», nada se añade a nuestra imagen. Si imaginamos la palabra impresa «oro», ningún número nos viene a la mente; si se nos pregunta cuántas letras contiene, la respuesta inmediata es 3, pero con eso no se cambia en nada la imagen. La cuestión es más clara con el número 0. No podemos formarnos una imagen de cero estrellas; la imagen de un cielo nublado no es imagen de ello.

Es desde luego cierto que imágenes de todo tipo cruzan por nuestra mente cuando nos ocupamos de aritmética o calculamos un número. Podemos tener imágenes de puntos en un dado, o de medidas de longitud entre la Tierra y el Sol. Pero estas imágenes no nos ayudarán en lo más mínimo a captar la naturaleza de los números pequeños, o a calcular la distancia entre la Tierra y el Sol. Ni siquiera podemos tener la imagen de una cosa tan concreta como la Tierra, tal como sabemos que es, y hemos de contentarnos con un mero símbolo.

> El pensamiento nos hace a menudo traspasar los límites de lo representable sin que nuestros juicios pier-

dan por ello la base para nuestras inferencias. Incluso aunque, como parece ser el caso, el hombre no sea capaz de pensar sin representaciones, su relación con el objeto de pensamiento puede sin embargo ser extrínseca, arbitraria y convencional (FA, pág. 168).

En la introducción a los *Fundamentos* había anunciado Frege tres principios fundamentales que guiaban su investigación: separar la lógica de la psicología; no preguntar jamás por el significado de una palabra aislada, sino sólo en el contexto de una proposición; y no confundir nunca el concepto con el objeto. Los tres principios están presentes en el argumento de que los números son objetos independientes.

La cuestión que aquí se discute hunde manifiestamente sus raíces en la distinción entre concepto y objeto. Nuestra reticencia a aceptar que los números sean objetos y no conceptos surge, en opinión de Frege, de nuestra inclinación a preguntar por el significado de las palabras aisladas de sus contextos. Esta inclinación nos lleva a esperar que el significado de una palabra esté materializado en una imagen, lo cual es a su vez uno de los modos de confundir la lógica con la psicología. Si no podemos hallar la imagen evocada por una palabra aislada, o sólo nos acuden imágenes irrelevantes, nos sentimos prestos a negar que haya en la realidad un objeto que corresponda a esa palabra.

> Mas es preciso dirigir siempre nuestra atención a la proposición completa. Sólo en la proposición tienen las palabras realmente un significado. Las imágenes internas que eventualmente nos acompañan no tienen por qué corresponder a los elementos lógicos del juicio. Basta con que la proposición tomada en su totalidad tenga un sentido; de éste obtienen también las partes su contenido (FA, pág. 168).

Para mostrar, por tanto, que un número es un objeto independiente, Frege ha de mostrar que los numerales se

comportan en las proposiciones como nombres propios. En el lenguaje común, los numerales aparecen con frecuencia como adjetivos, como en «Júpiter tiene cuatro lunas». Pero una proposición de este tipo puede siempre ser transformada en «El número de las lunas de Júpiter es cuatro». En su análisis de la proposición «El número 1 pertenece al concepto *luna de la Tierra*», Frege ha mostrado que un numeral no se comporta como una palabra-concepto. Pero ¿basta esto para mostrar que se trata de una palabra-objeto, de un nombre?

Decimos «el número uno», y Frege sostiene que el artículo determinado indica que estamos hablando de un objeto. Y continúa diciendo que un número individual es un objeto independiente porque «constituye sólo una parte de lo que se está afirmando» (FA, pág. 166). Pero esto no es muy convincente: igualmente se podría decir que *pertenecer* es un objeto porque «pertenece» es sólo una parte de lo que se afirma del concepto cuando se le asigna un número. Lo que Frege quiere realmente decir es que un número es susceptible de ser el sujeto de un contenido judicable singular (FA, pág. 173, nota 87). Y esto es verdad: utilizamos proposiciones tales como «7 es un número primo». Pero, dado que Frege dice con frecuencia que la gramática ordinaria es equívoca (como en «Júpiter tiene 4 lunas»), la tesis de que los números son objetos necesita un soporte más sólido que el que aportan estos hechos del idioma cotidiano.

La característica crucial de un objeto es, según Frege, la de ser algo que posee una identidad susceptible de ser reconocida una y otra vez. De aquí que el argumento de más peso para defender que los números son objetos es que pueden ser el sujeto de ecuaciones, tal como en 1 + 1 = 2. La ecuación es para Frege un enunciado de identidad: las expresiones que flanquean el signo igual son tomadas como dos nombres de un mismo objeto. El signo de ecuación en aritmética es equivalente al «es» de identidad del lenguaje ordinario, como en «Pa-

rís es la capital de Francia». En «el número de lunas de Júpiter es cuatro», este «es» debería también ser tomado como el «es» de identidad, equivalente al signo «=». De todas las formas de proposiciones, las ecuaciones o identidades son las más típicas de la aritmética. Y, por encima de todo, el hecho de que los números figuren en las ecuaciones es lo que, según Frege, muestra que éstos son objetos independientes (FA, pág. 166).

Si los números son objetos independientes, y pueden figurar en ecuaciones, entonces estas ecuaciones tienen que ser proposiciones que expresen nuestro reconocimiento de que un número es siempre el mismo número. Pues, de manera general, si vamos a utilizar el símbolo a para significar un objeto, hemos de tener un criterio para decidir en todos los casos si b es lo mismo que a, incluso aunque no siempre nos sea posible aplicar este criterio. Hemos de disponer, por así decirlo, de un criterio de identidad para un objeto dado, sea del tipo que sea. A fin de establecer un criterio de identidad para los números, tenemos que definir el sentido de la proposición

> El número que pertenece al concepto *F* es el mismo que el que pertenece al concepto *G*.

Deberemos reproducir el contenido de esta proposición sin utilizar la expresión «El número que pertenece al concepto *F*», pues esta expresión, con su artículo determinado, asume que ya hemos realizado la tarea de reidentificar un número. Sólo la acertada ejecución de tal tarea nos autorizaría a usar el artículo determinado y a asignarle un nombre propio.

Pero ¿cómo proceder? Frege adopta una sugerencia de Hume: «Cuando dos números están combinados de tal modo que el uno tiene siempre una unidad en respuesta a cada unidad del otro, decimos que son iguales» (*Tratado de la naturaleza* humana, I, iii, i). Y esto podría materializarse definiendo la igualdad numérica (que

Frege trata como idéntica a la identidad numérica) en términos de correlación de uno-a-uno. El número que pertenece al concepto *F* es el mismo que el número que pertenece al concepto *G* si todos los elementos que caen bajo *F* pueden ser puestos en correlación de uno-a-uno con todos los elementos que caen bajo *G*. Por ejemplo, el número de cuchillos en la mesa es el mismo que el número de platos en la mesa si hay un cuchillo a la derecha de cada plato.

Sobre la base de esta simple idea, Frege propone dar una definición de los números individuales que escape a las objeciones planteadas por otros filósofos a las anteriores propuestas. Su idea es definir el concepto de número en términos del concepto de identidad numérica. Y esto tiene toda la apariencia de un procedimiento retorcido. Lo natural sería pensar que entendemos lo que significa «lo mismo que *F*» si entendemos lo que significa «*F*» y lo que significa «lo mismo»; así, entendemos lo que significa «el mismo libro» porque tenemos un concepto de *libro* y poseemos un concepto general de la identidad. Hay seguramente un concepto general de la identidad, puesto que el concepto se aplica a muchas otras cosas aparte de los números. ¿No deberíamos esperar entender «el mismo número» por aplicación de nuestro concepto general de identidad al concepto de número?

Frege replica que todavía no tenemos un concepto de número. Lo que él está proponiendo es definir «número» en términos de una definición de «... es el mismo número que ...». Para mostrar que éste no es un inapropiado modo de proceder, Frege nos invita a considerar un concepto diferente, el de la dirección de una línea.

Dos líneas son paralelas entre sí si ambas tienen la misma dirección. Ahora bien, ¿habría que definir el paralelismo en términos de dirección, o debería ser definida la dirección en términos de paralelismo? El argumento presentado sugeriría que el punto de partida apropiado sería el concepto de *dirección:* una vez que sepamos

qué es la dirección, será fácil establecer si dos líneas tienen la misma dirección.

Sin embargo, ¿poseemos el concepto de dirección? Puesto que se trata de un concepto geométrico, presumiblemente nos vendrá dado por la intuición. Pero, pregunta Frege, ¿tenemos una intuición de la dirección de una línea recta? «De una línea recta, ciertamente; pero ¿distinguimos en nuestra intuición entre esta línea recta y alguna otra cosa, su dirección?» Por otra parte, no hay dificultad alguna en evocar la imagen de dos líneas rectas paralelas.

Por tanto, en lugar de definir el paralelismo en términos de identidad de dirección, tal vez debiéramos movernos en la dirección opuesta y decir que «la dirección de la línea *a* es idéntica a la dirección de la línea *b*» significa lo mismo que «la línea *a* es paralela a la línea *b*». Pero de hacerlo así, ¿cómo podemos estar seguros de que nuestra definición de identidad de dirección no contaminará al concepto de identidad mismo? Este concepto está expresado en leyes muy conocidas que, según Frege, están perfectamente resumidas en el famoso *dictum* de Leibniz:

> Dos cosas son respectivamente iguales si una de ellas puede ser sustituida por la otra sin pérdida de verdad[1].

Podemos defender por tanto nuestra definición de «dirección» si podemos mostrar que, si la línea *a* es paralela a la línea *b*, es posible sustituir en todas partes «la dirección de *a*» por «la dirección de *b*» sin pérdida de verdad.

Queda sin embargo una dificultad seria. Nuestra definición nos capacita para reconocer la dirección de *a*

---

[1] Es curioso que Frege no aluda aquí a la confusión entre signo y cosa significada. En cambio, introduce una serie de observaciones, que son necesarias sólo porque la palabra alemana *gleich* significa tanto «semejante» como «idéntico».

como un objeto, y para volverla a reconocer como el mismo objeto si se nos presenta en otra forma como la dirección de *b*. Pero nuestra definición no nos capacita para decidir, por ejemplo, si Inglaterra es lo mismo que la dirección del eje de la Tierra. La dificultad es análoga al problema de decidir si Julio César era o no era un número. «Naturalmente», dice Frege, «nadie va a confundir a Inglaterra con la dirección del eje de la Tierra; pero eso no es nada que debamos agradecer a nuestra definición de dirección».

Nos sigue faltando aquí un concepto de dirección, tal como en el anterior caso nos faltaba el concepto de número. Si tuviéramos tal concepto, podríamos establecer que la proposición

La dirección de *a* es idéntica a *q*

debería ser negada si *q* no fuese una dirección, mientras que si es una dirección tendrá que ser afirmada o negada de acuerdo con nuestra definición previa. Pero aún no estamos en situación de dar, sin caer en circularidad, una definición de lo que va a ser una dirección.

Para resolver estas dificultades, Frege presenta ahora una propuesta de significación filosófica considerable. Observa que si la línea *a* es paralela a la línea *b*, entonces la extensión del concepto «línea paralela a la línea *a*» es idéntica a la extensión del concepto «línea paralela a la línea *b*»; e inversamente, si las extensiones de esos dos conceptos son idénticas, entonces *a* es paralela a *b*. Así pues, propone definir la dirección de la línea *a* como: la extensión del concepto *paralela a la línea a*.

Para evaluar esta definición debemos aclarar primero qué significado tiene la extensión de un concepto. Frege dice: «doy por asumido que se sabe lo que es la extensión de un concepto». Para los lógicos anteriores a Frege, la extensión de un concepto es la totalidad de objetos que caen bajo él: así, la extensión del concepto *gato* es el conjunto de todos los gatos, y la extensión del

concepto *luna de Júpiter* es el conjunto de las lunas de Júpiter[2].

De este modo, cuando Frege dice que la dirección de la línea *a* es la extensión del concepto *paralela a la línea a*, está definiendo la dirección de la línea como la clase de todas las líneas paralelas a ella. No es necesario detenerse en los méritos de esta definición, pues en el texto fregeano es meramente un modo de preparar el camino para una definición de número que será asimismo acuñada en términos de la extensión de conceptos.

La noción de extensión de un concepto parece bastante clara cuando el concepto en cuestión corresponde a un predicado monádico, tal como «... es un gato». Pero en la *Conceptografía* había introducido Frege la noción de predicados diádicos, tales como «...» está a la derecha de «...», o «...» es más pesado que «...». A estos predicados diádicos les corresponden conceptos relacionales, y son estos conceptos los que van a desempeñar un papel crucial en la definición fregeana de número. Pero la noción de extensión de un concepto relacional demanda alguna explicación adicional.

Frege observa que las proposiciones

> La Tierra tiene más masa que la Luna,
> El Sol tiene más masa que la Tierra,

expresan ambas juicios que contienen el concepto relacional *tener más masa que*. En cada uno de los juicios, un par de objetos están correlacionados entre sí por medio de esta relación.

> Cada par individual de objetos correlacionados se comporta respecto al concepto de relación —se podría

[2] Si no hay nada que caiga bajo un concepto, ¿significa esto que el concepto no tiene extensión? No necesariamente. Muy poco tiempo antes de Frege, Jevons había introducido la noción de clase nula (o vacía): una clase que no tiene miembros. Frege desarrolla esta idea en su propia obra, como veremos más adelante.

decir que a título de sujeto— de un modo semejante a como un objeto individual se comporta respecto al concepto bajo el cual cae. Sólo que aquí el objeto es compuesto (FA, pág. 177).

Es decir, habremos de pensar en los pares (Tierra, Luna), (Sol, Tierra), y similares, como cayendo bajo el concepto relativo *tiene más masa que* del mismo modo en que los individuos Tim, Pupsi, etc., caen bajo el concepto *gato*. La extensión de este concepto relativo será por tanto el conjunto de pares ordenados de objetos que están ligados por dicha relación.

Ahora estamos preparados para la introducción por parte de Frege de una definición de número análoga a su definición de dirección.

> El número que pertenece al concepto *F* es la extensión del concepto «numéricamente equivalente al concepto *F*» (FA, pág. 175).

Frege aclara el significado de esta última expresión: dos conceptos *F* y *G* son equivalentes numéricamente si los objetos que caen bajo *F* pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los objetos que caen bajo *G* —a la manera en que, al poner una mesa con un cuchillo junto a cada plato, los objetos que caen bajo el concepto *cuchillo* pueden ser puestos en relación de uno-a-uno con los objetos que caen bajo el concepto *plato*.

Antes de evaluar la definición de Frege, ilustremos su significado en un caso simple. El número que corresponde al concepto *evangelista* es 4: Hubo cuatro evangelistas, Mateo, Marcos, Lucas y Juan. Hay muchos conceptos que son, en el sentido de Frege, numéricamente equivalentes al concepto *evangelista*: por ejemplo, *puntos cardinales, palos de la baraja, fuerzas fundamentales*. Entonces, según la definición de Frege, el número que pertenece al concepto *evangelista* es la extensión

del concepto *numéricamente equivalente al concepto evangelista*. Puesto que sólo un concepto puede ser numéricamente equivalente a otro concepto, esta extensión será una clase de conceptos: la clase de los conceptos que, al igual que los mencionados más arriba, son aplicables a cuatro y solamente cuatro objetos. La definición fregeana dará como resultado que el número cuatro es la clase de todos los conceptos que tienen —en este sentido— la propiedad de la cuaternidad. Será a la vez una clase de conceptos (los que poseen la propiedad de la cuaternidad) y la extensión de un concepto de orden superior (el concepto de cuaternidad misma).

A primera vista, esta definición parece incongruente y circular. Pero la circularidad es sólo aparente, y la adecuación de la definición se deja ver mejor derivando de ella las conocidas propiedades de los números. Para ilustrar el sentido de la definición de Frege utilizamos antes el número cuatro; pero en la definición misma, y en la crucial noción de la igualdad entre conceptos, no se recurrió a número alguno. Como Frege dice, si un camarero quiere estar seguro de que ha puesto tantos cuchillos como platos, no necesita contar unos y otros; todo lo que tiene que hacer es asegurarse de que hay exactamente un cuchillo junto a cada plato. La conciencia de la correlación biunívoca puede ser anterior a, y no necesita presuponer, la conciencia del número de objetos correlacionados. De aquí que el número pueda ser definido sin circularidad en términos de correlación biunívoca.

La correlación biunívoca es ahora formalmente definida en dos etapas. En primer lugar está la definición de correlación:

> Si todo objeto que cae bajo el concepto *F* está en la relación Φ con un objeto que cae bajo el concepto *G*, y si cada objeto que cae bajo *G* está en la relación Φ con un objeto que cae bajo *F*, entonces los objetos que

caen bajo *F* y *G* están mutuamente correlacionados por la relación Φ (FA, pág. 178).

Por ejemplo, si todo marido está casado con alguna esposa, y toda esposa está casada con algún marido, entonces maridos y esposas están correlacionados por el matrimonio.

Esta definición nos da la correlación, pero no la correlación biunívoca. La proposición acabada de enunciar es tan verdadera en una sociedad polígama o poliándrica como en una monógama; y desde luego es sólo en una sociedad monógama donde maridos y esposas están correlacionados biunívocamente, de suerte que el número de maridos es el mismo que el número de esposas.

Para pasar de la correlación sin más a la correlación biunívoca o de uno-a-uno, tenemos que añadir dos nuevas proposiciones.

> Si *d* está en la relación Φ con *a*, y si *d* está en la relación Φ con *e*, entonces sean lo que fueren *d*, *a* y *e*, *a* es lo mismo que *e*.
>
> Si *d* está en la relación Φ con *a*, y si *b* está en la relación Φ con *a*, entonces sean lo que fueren *d*, *b* y *a*, *d* es lo mismo que *b* (FA, pág. 179).

Hemos definido así la correlación de uno-a-uno en términos puramente lógicos, sin utilizar ningún concepto extraído de la aritmética. Con la definición que establece que un concepto *F* es numéricamente equivalente a un concepto *G* si hay una relación que correlaciona biunívocamente a los objetos que caen bajo *F* con los objetos que caen bajo *G*, tenemos todo lo necesario para la siguiente definición:

> El número que pertenece al concepto *F* es la extensión del concepto *numéricamente equivalente al concepto F*.

No hay, por tanto, nada circular en la definición de número que Frege ofrece ahora triunfalmente:

n es un número

significa lo mismo que la expresión

existe un concepto tal que *n* es el número que pertenece a ese concepto.

Antes de proceder a definir los números individuales sólo le resta a Frege mostrar que el número que pertenece al concepto *F* es idéntico al número que pertenece al concepto *G* si el concepto *F* es numéricamente equivalente al concepto *G*. Esto, que suena a tautología, necesita de hecho una prueba; pero la prueba, aunque un tanto complicada, no plantea dificultades (FA, sección 73).

Una vez dada la definición general de número como un conjunto de conceptos numéricamente equivalentes, puede proceder Frege a definir los números individuales mediante la selección del apropiado concepto que especifique cada conjunto. Como hemos visto antes, el número cuatro podría ser definido, según el modelo de Frege, como el conjunto de conceptos que son numéricamente equivalentes al concepto *evangelista*. Ciertamente, cualquier otro concepto que comprenda bajo sí a cuatro objetos serviría igualmente: puesto que si dos conceptos cualesquiera son numéricamente equivalentes a un tercero, son numéricamente equivalentes entre sí (Dada la especial definición fregeana de «numéricamente equivalente», esto no es una tautología, sino que requiere ser probado; sin embargo, su prueba no presenta dificultad alguna (FA, págs. 179-80). Pero un concepto como el de *evangelista* sería inútil para el propósito de Frege de reducir la aritmética a la lógica; porque no es parte de la lógica el hecho de que hubiera cuatro y sólo cuatro redactores del evangelio. Por otra parte, no hay

garantía alguna de poder hallar un concepto empírico que sea adecuado para la serie infinita de los números naturales.

Lo que Frege hace es desarrollar el programa leibniziano de definir todos los números naturales en términos de 0, 1 e incremento en uno. Y comienza por definir al cero. Podría haberlo definido, por ejemplo, como el conjunto de conceptos iguales al concepto *unicornio.* Porque, puesto que no hay unicornios, la clase de los unicornios tiene cero miembros. Pero una vez más, Frege busca una definición que envuelva solamente términos tomados de la lógica. Y define al cero como sigue:

> 0 es el número que pertenece al concepto «no igual a sí mismo» (FA, pág. 181).

Puesto que toda cosa es idéntica a sí misma, no hay nada que caiga bajo el concepto *no idéntico a sí mismo.* Y puesto que esto es una verdad analítica que conocemos a priori, Frege puede hacer uso de ella para dar una definición puramente lógica del cero.

Dos objeciones se imponen por sí mismas a esta definición. En primer lugar, cuando decimos «no hay objetos que no sean idénticos a sí mismos», ¿acaso el «no» que utilizamos no es ya simplemente un sinónimo de cero, y por tanto la definición es circular? (cfr. FA, pág. 165). Y en segundo lugar, ¿no es la noción de no-ser-idéntico-a-sí-mismo autocontradictoria y por tanto absurda?

Ambas objeciones son fácilmente refutables. Respecto a la primera, podemos reescribir nuestra proposición de este modo:

> Sea x lo que fuere, no es el caso que x no sea idéntica a sí misma.

En esta reformulación no hay nada que se parezca a un sinónimo de «0». En cuanto a la segunda, nada prohibe utilizar conceptos autocontradictorios, mientras no

caigamos en el engaño de pensar que algo cae bajo ellos.

> Pero lo que la lógica y el rigor de una prueba exigen es que un concepto tenga los límites perfectamente definidos, de suerte que para todo objeto pueda decirse si cae o no bajo el concepto en cuestión. Este requisito lo cumplen enteramente los conceptos que, como «no idéntico a sí mismo», contienen una contradicción; cualquiera que sea el objeto elegido, sabemos que no cae bajo ningún concepto de este tipo (FA, págs. 181-182).

Por la definición fregeana de número en general, si 0 es el número que pertenece al concepto *no idéntico a sí mismo*, entonces 0 es el conjunto de conceptos que son numéricamente equivalentes a ese concepto. Tendremos que mostrar que todo concepto bajo el cual no cae ningún objeto es numéricamente equivalente a cualquier otro concepto que tampoco tenga objetos bajo sí. Pero ¿cómo puede realizarse esta tarea cuando la equivalencia numérica ha sido definida en términos de correlación biunívoca de objetos que caen bajo los conceptos?

Examinemos más detenidamente la definición de correlación, que puede ser expuesta como sigue:

Hay una relación Φ tal que:
(1) Sea lo que sea x, si x cae bajo F entonces está en la relación Φ con algún G.
(2) Sea lo que sea y, si y cae bajo G entonces está en la relación Φ con algún F.

Frege dice que el condicional «si» de este contexto ha de ser entendido en el sentido veritativo-funcional en que fue introducido en la *Conceptografía;* esto es, «Si p entonces q» será tomada como verdadera supuesto solamente que no se dé el caso de que p sea verdadera y q falsa. Puesto que, en el caso que nos ocupa, sea lo que sea el objeto x, ese objeto no cae bajo F, y sea lo que sea y, tampoco y cae bajo G, tanto (1) como (2) en la

anterior definición de correlación resultarán ser verdaderas, y lo serán con independencia de la relación que introduzcamos en el lugar de la variable Φ. Las proposiciones que haya que añadir para convertir la correlación en una correlación biunívoca resultarán igualmente verdaderas de la misma vacua manera. De lo cual se sigue que si ningún objeto cae bajo *F* y ningún objeto cae bajo *G*, entonces los conceptos *F* y *G* son numéricamente equivalentes. Tampoco es difícil mostrar que cualquier concepto que englobe bajo sí a algún objeto no es numéricamente equivalente a ningún concepto que no englobe bajo sí a ningún objeto. De acuerdo con esto, la definición de cero es perfectamente correcta.

Para pasar de cero a 1, Frege tiene que definir primero la relación que hay entre los miembros adyacentes de la serie numérica. Y procede a definir «*n* es un inmediato sucesor de *m*» así:

> Hay un concepto *F* y un objeto *x* que cae bajo él, tal que el número que pertenece al concepto *F* es *n* y el número que pertenece al concepto «cae bajo *F* pero no es idéntico a *x*» es *m* (FA, pág. 183).

El alcance de esta definición puede ser elucidado utilizando nuevamente un ejemplo no lógico. Tomemos el concepto de *Monarquía Tudor*. Por la historia de Inglaterra sabemos que el número que pertenece a este concepto es 5. Hay, por así decirlo, cinco objetos que caen bajo él. Tomemos uno de tales objetos: el Rey Enrique VIII. El número que pertenece al concepto *Monarca Tudor no idéntico a Enrique VIII* es 4. Y 5 es ciertamente el inmediato sucesor de 4 en la serie de los números. Pero, una vez más, nuestro ejemplo de concepto *F* es inútil para el propósito de Frege, puesto que está extraído de la historia y no de la lógica.

En su lugar, Frege toma el concepto *idéntico a cero*. Hay un, y solamente un, objeto que cae bajo este concepto, a saber el cero. Ahora bien, ¿cuál es el número

de cosas que caen bajo tal concepto pero no son idénticas a cero? ¿Cuál es, por decirlo de alguna manera, el número que pertenece al concepto *idéntico a cero pero no idéntico a cero?* Obviamente, ese número es cero.

Si ahora definimos a 1 como el número que pertenece al concepto *idéntico a cero* tenemos lo siguiente.

> Hay un concepto, *idéntico a cero*, y un objeto que cae bajo él, cero, tal que el número que corresponde al concepto *idéntico a cero* es 1, y el número que corresponde al concepto *idéntico a cero pero no idéntico a cero* es 0.

Por la definición de «sucesor» esto significa que 1 sucede inmediatamente a 0 en la serie numérica. (Son necesarios unos cuantos pasos adicionales para mostrar que es *solamente* el 1 el que sigue inmediatamente al 0, de suerte que podemos hablar de 1 como *el* sucesor de 0.)

En efecto, Frege define a los números de la manera siguiente:

0 es el número que pertenece al concepto *no idéntico a sí mismo,*

1 es el número que pertenece al concepto *idéntico a cero,*

2 es el número que pertenece al concepto *idéntico a 0 o a 1,*

3 es el número que pertenece al concepto *idéntico a 0, a 1 o a 2,*

En orden a mostrar que este patrón o modelo puede ser repetido para generar la infinita serie numérica, Frege ha de probar que cada número en la serie de los números naturales tiene otro que le sucede, y por tanto que la serie de números es infinita. A este fin utiliza la definición de la relación ancestral que había dado en la *Conceptografía.*

Dada una relación Φ, podemos definir otra relación como

y sigue inmediatamente a x en la serie Φ

o

x precede inmediatamente a y en la serie Φ

Podemos, por ejemplo, definir las nociones de *descendiente* y *antepasado* en términos de la relación de *padre*. El procedimiento de Frege para dar tal definición discurre así. Primeramente define la noción de propiedad hereditaria: una propiedad es hereditaria en la serie Φ cuando, para cualquier d, si la propiedad pertenece a d, entonces pertenece a todo d que esté en la relación Φ con él. La humanidad, por ejemplo, es hereditaria en la serie padre-hijo: todo hijo de un humano es a su vez un humano. En segundo lugar dice Frege que y sigue inmediatamente a x en la serie Φ, supuesto que y tenga la propiedad hereditaria Φ que tiene x. Si volvemos a tomar la relación Φ como la relación de padre a hijo, podemos decir que los descendientes de Adán son todos aquellos que tienen todas las propiedades hereditarias que cada hijo de Adán posee.

Para hacer uso de la relación ancestral en la generación de la serie de números, hemos de tomar la relación Φ como la relación, ya definida, que un número mantiene con otro cuando lo sigue inmediatamente. En este caso, la serie Φ será la serie de los números naturales. Podemos decir que «y sigue inmediatamente a x en la serie de números naturales» significa lo mismo que «y tiene todas aquellas propiedades que corresponden a cualquier inmediato sucesor de x y que son hereditarias en la serie de los números naturales». El sucesor inmediato de un número será, por así decirlo, el hijo de ese número; los otros números que lo siguen en la serie de números naturales serían algo así como sus descendientes.

Frege introduce ahora el concepto de *ser un miembro de la serie de números naturales que termina en n; a* cae bajo este concepto si n es idéntico a a o sigue a a en

la serie de números naturales. Puede ser probado —y Frege ofrece un bosquejo de la prueba— que el número que pertenece a ese concepto sigue inmediatamente a *n* en la serie de números naturales. Para cualquier *n* habrá, por tanto, un número que lo siga inmediatamente en la serie, y por ello la serie no tiene fin.

El procedimiento que Frege sigue es ahora conocido habitualmente por el nombre de «inducción matemática». La inducción matemática consta de una base de inducción y un paso inductivo. En el sistema de Frege, la base de la inducción es suministrada por el número cero. Ya ha sido mostrado que el número de la serie de números naturales que termina en cero sigue inmediatamente a cero en la serie de números naturales; porque uno es el número que pertenece a la serie de números naturales que termina en cero.

El paso inductivo es como sigue.

Si *a* es el sucesor inmediato de *d*, y si es verdadero que el número que pertenece al concepto *miembro de la serie de números naturales que termina en d* es el sucesor inmediato de *d*, entonces es igualmente verdadero de *a* que el número que pertenece al concepto *miembro de la serie de números naturales que termina en a* es el sucesor inmediato de *a*.

Es este paso el que nos permite movernos sin interrupción en la serie de números naturales que empieza por cero, desde cada *n* a *n* + 1. Pero aún tenemos que probar que ningún objeto que es miembro de la serie de números naturales que empieza por cero puede seguirse a sí mismo en esa serie. Aunque Frege no lo hace, puede ser mostrado a partir de las definiciones que éste es el caso.

Ahora define Frege el concepto «*n* es un número finito» como equivalente a «*n* es un miembro de la serie de números naturales que empieza por 0». Con esta definición puede concluir que ningún número finito se sigue a sí mismo en la serie de números naturales.

Y esto, a su vez, le permite definir los números infini-

tos. El número que corresponde al concepto *número finito* es, como George Cantor había mostrado, un número infinito, simbolizado comúnmente por alef-cero, $\aleph_0$. Según la definición de Frege, decir que el número que corresponde al concepto *F* es alef-cero significa que existe una relación que correlaciona biunívocamente los objetos que caen bajo el concepto *F* con los números finitos. El sentido de esto es claro, y ello es suficiente para justificar el uso del símbolo alef-cero y para asegurarle un significado. Alef-cero es por tanto un número que se sigue a sí mismo en la serie de números naturales.

En la conclusión de los *Fundamentos*, Frege espera haber demostrado la probabilidad de que las leyes de la aritmética sean no solamente a priori sino también analíticas. La aritmética se torna en una extensión de la lógica, y todo teorema de la aritmética resulta ser una ley lógica. La aritmética no es una ciencia física; las leyes del número no son leyes de la naturaleza. En el mundo físico de la naturaleza no hay conceptos, ni propiedades de conceptos, ni números. Las leyes de la aritmética pueden ser llamadas leyes de leyes de la naturaleza; pues afirman conexiones entre juicios, y algunos juicios son leyes de la naturaleza.

Kant subestimó la fertilidad de los juicios analíticos, nos dice Frege, porque restringió su consideración a los juicios universales afirmativos, y consideró al tipo de análisis que tales juicios envuelven como una simple resolución de un concepto en sus componentes característicos. Mas la definición en términos de componentes, afirma Frege, es la forma de definición menos fructífera; pues define el alcance de un concepto (tal como «humano») en términos de otros conceptos existentes (tales como «racional» y «animal»). Los diferentes tipos de definición que Frege ha ofrecido en los *Fundamentos* trazan líneas de demarcación donde previamente no se había establecido absolutamente ninguna. De lo cual se sigue que nuestro conocimiento puede ser genuinamen-

te ampliado mediante las proposiciones analíticas. Las verdades que demostramos están contenidas en las definiciones, no a la manera manifiesta de las vigas en una casa, sino como las plantas lo están en las semillas.

Tal vez resulte sorprendente que Frege se contente con reivindicar una mera probabilidad para la tesis de que la aritmética es derivada de la lógica. Sin duda alguna, una prueba como la que él ofrece debería acarrear consigo la seguridad de que llegaría a imponerse; en caso contrario, tendría que derrumbarse juntamente con el objetivo de su autor. Pero Frege no se está limitando a ser inapropiadamente modesto, sino llamando la atención sobre la naturaleza informal de las pruebas en los *Fundamentos*, en las que un examen más detenido podría descubrir el recurso tácito a ciertas premisas no lógicas en algún punto de la argumentación. Las pruebas de Frege no son más sólidas desde el punto de vista lógico de lo que lo eran las pruebas que ofrecían los matemáticos de su tiempo.

> El matemático se contenta con que cada paso que conduzca a un nuevo juicio se imponga por la evidencia, sin preguntarse si es lógica o intuitiva la naturaleza de esta evidencia. Pero, con frecuencia, tal paso es un acto complejo equivalente a varias inferencias simples, entre las cuales puede aún deslizarse algún elemento intuitivo. Tal como las conocemos, en las pruebas se avanza por saltos (FA, pág. 194).

Para suprimir tales saltos, las pruebas de Frege tendrían que haber sido dadas en el simbolismo de su *Conceptografía*, que es un cálculo diseñado para avanzar en un reducido número de pasos canónicos, al objeto de impedir que alguna premisa pueda ser introducida inadvertidamente en una prueba. Pero las rigurosas demostraciones de este tipo suelen resultar tediosas al lector no especializado al que los *Fundamentos* van dirigidos.

Al final de la obra, Frege pasa a considerar muy brevemente otros tipos de números distintos de los naturales: negativos, fraccionarios, irracionales y complejos. La mayor parte de su atención está dedicada a criticar lo que él llama la explicación «formalista» de esos números. El blanco de sus ataques se dirige contra la suposición de que un concepto sea considerado libre de contradicción si no se contradice a sí mismo. La ausencia de contradicción en un concepto no constituye, en todo caso, garantía alguna de que un objeto caiga bajo ese concepto. La verdad es lo contrario: el único modo de probar que un concepto está libre de contradicción es aducir algo que caiga bajo él. Es un craso error, mantiene Frege, pensar que el matemático puede simplemente producir postulados y asumir que son satisfechos por algo. Un matemático no es un dios que pueda crear cosas a voluntad; es más bien como un geógrafo que sólo puede descubrir lo que ya hay y darle un nombre.

La equivocación del formalista está en confundir conceptos y objetos.

> Nada nos impide utilizar el concepto «raíz cuadrada de -1»; pero no estamos autorizados para hacerlo preceder, sin más, del artículo determinado y considerar a la expresión «la raíz cuadrada de -1» como plena de sentido (FA, pág. 198).

Todo lo que tenemos que hacer con los números complejos e irracionales es lo que hicimos con los números naturales.

> Todo se reduce a buscar un contenido de un juicio que pueda ser transformado en una identidad cuyos miembros sean precisamente los números buscados. En otras palabras: es preciso establecer el sentido de un juicio de reconocimiento para tales números (FA, pág. 203).

De hacerlo así, estos nuevos números serán para nosotros, al igual que los números naturales, las extensio-

nes de los conceptos, dejando de ser con ello más misteriosos que los enteros positivos.

Frege concluye su obra diciendo que su concepción del número explica el particular atractivo de la matemática. El estudio de la matemática ilustra el sentido en el cual puede decirse que el objeto propio de la razón es la razón misma. No hay nada más objetivo que las leyes de la aritmética, y sin embargo:

> En la aritmética nos ocupamos de objetos que no nos son conocidos a través de los sentidos como algo ajeno, exterior, sino que son dados inmediatamente a la razón, la cual puede penetrarlos plenamente como lo que le es más propio (FA, pág. 203).

CAPÍTULO VI

Función, concepto y objeto

Los fundamentos de la aritmética aparecieron en 1884. A partir de ese año, Frege no publicó casi nada durante el resto de la década, salvo una conferencia, «Sobre teorías formales de la Aritmética». Esta conferencia está principalmente dedicada a desarrollar la crítica del formalismo que aparece en las secciones finales de los *Fundamentos.*

Dos diferentes tipos de teorías, dice Frege, pueden ser denominados «formales»: uno de ellos es bueno, el otro malo. El tipo bueno de teoría formal de la aritmética es la propia teoría de Frege de que la aritmética es derivable de la lógica. El tipo malo de teoría formal es la que mantiene que los signos para números tales como «1/2» o «π» no son más que signos vacíos.

Nadie, dice Frege, podría realmente poner en práctica la teoría formalista. El mero hecho de llamar «signos» a los numerales indica ya que esos signos significan algo. Un formalista impenitente los llamaría «formas». Si nos tomamos en serio la aseveración de que «1/2» no designa nada, entonces ese signo se reduce a una simple mancha de tinta o un trazo de tiza que tiene varias propiedades físicas y químicas. ¿Cómo es posible entonces que pueda tener la propiedad de que sumado a sí mismo produzca 1? ¿Diremos que esta propiedad le ha sido

dada por definición? Una definición sirve para conectar un sentido con una palabra: pero se suponía que este signo era vacío, y que por tanto carecía de contenido. Es cierto que a nosotros corresponde dar significado a un signo, y que por ello las propiedades que el contenido de un signo haya de tener dependen en parte de la voluntad humana. Pero esas propiedades son propiedades del contenido, no del signo en sí, y por tanto, de acuerdo con los formalistas, no serán propiedades del número. Lo que nosotros no podemos hacer es dar por definición propiedades a las cosas.

> Con la misma facilidad pudiera antojársele a uno acusar a su convecino de mentiroso por el mero recurso a una definición. La prueba de su acusación le sería entonces muy fácil de llevar a cabo; le bastaría con decir: Esto se sigue inmediatamente de mi definición. Pues la consecuencia se seguiría, en efecto, con el mismo rigor con el que se sigue de la definición: «este trazo de tiza tiene la propiedad de dar 1 cuando se suma a sí mismo» que dicho trazo, al ser adicionado a sí mismo, da 1 (KS [pág. 106]*).

Ninguna definición, dirá más adelante Frege, puede adornar una cosa con propiedades que antes no tuviera ya —aparte de la propiedad única de significar algo.

Según la teoría formalista no nos estaría permitido decir que 1/2 = 3/6. Porque si ambas expresiones son meramente formas, una y otra no tienen la misma, sino muy diferentes formas. Sin duda, si esas expresiones son tomadas como signos de contenidos, la ecuación establece que los dos signos tienen el mismo contenido. Pero si no hay ningún contenido, la ecuación no tiene el menor sentido.

* Para el criterio de paginación de los ensayos de semántica tratados en este capítulo, véase la primera nota de la página de abreviaturas en las referencias a las obras de Frege que figura al principio de este libro *[N. del T.]*.

La conferencia sobre teorías formales añade realmente poco a lo que ya se había dicho en los *Fundamentos*. Pero a principios de la década de 1990 publicó Frege tres artículos en los que exponía las tesis centrales de su metafísica y de su filosofía del lenguaje explicitando lo que estaba latente y clarificando lo que había quedado confuso en sus obras anteriores.

El primero de ellos es «Función y Concepto» (1891). La noción de función fue utilizada en la *Conceptografía*, pero la explicación dada allí era, como hemos visto en el capítulo 2, poco clara e inconsistente. La palabra es raramente usada en los *Fundamentos*: son los conceptos, no las funciones, los que tienen un papel crucial en la definición de número. En «Función y Concepto» reúne Frege las dos nociones: ahora resulta que un concepto es un tipo especial de función.

La noción de función está tomada de la matemática, en particular del análisis. Pero, advierte Frege, si se le pregunta a un matemático por el significado de una función es probable que se obtenga una respuesta insatisfactoria. «Una función de *x* es una expresión que contiene a *x*, una fórmula que contiene la letra *x*». Así, por ejemplo, «$2 \times 2^2 + 2$» sería una función de 2. Según Frege, tal respuesta es inadecuada, pues confunde forma y contenido, signo y cosa significada: tiene el defecto que, como acabamos de ver, ya denunció en los formalistas (FC, pág. 216). Pero igualmente hemos visto que cuando por primera vez introdujo Frege la noción de función en la *Conceptografía*, lo hizo también de tal manera que la función aparecía más bien como una expresión de un tipo particular que como expresión de lo que ese tipo significaba. Posiblemente Frege se está mostrando prudentemente autocrítico cuando dice que la confusión entre significante y significado es un error «que se encuentra con frecuencia en escritos matemáticos incluso de autores notables».

Lo esencial no es la expresión, sino su significado o contenido; no, por ejemplo, la expresión «$2 \times 2^2 + 2$», sino lo que ella significa. Bien, ¿y qué significa? Lo mismo

que el signo «10». Una ecuación tal como «$2 \times 2^2 + 2 = 10$» significa que el complejo de signos de la derecha tiene el mismo significado que el complejo de signos de la izquierda. (Aquí, al igual que en los *Fundamentos*, Frege mantiene que una ecuación establece una identidad, no una mera semejanza o igualdad; una diferencia de significante no puede ser nunca fundamento suficiente para una diferencia de significado.) Las diferentes expresiones que aparecen en los distintos lados de una ecuación verdadera, corresponden a diferentes nociones y aspectos, pero no a diferentes objetos.

Si una función, tal como Frege la entiende ahora, no es una expresión ni parte de una expresión, ¿tendremos que decir entonces que la función es lo que la expresión significa? Dicho así, tampoco esto sería correcto, pues una expresión como «$2(3^2 + 3)$» está simplemente representando a un número. Por lo tanto, si una función fuera a ser solamente lo que una expresión matemática significa, se limitaría a ser justamente un número; y así, como dice Frege, con la introducción de funciones «nada nuevo se habría ganado para la aritmética». La expresión «$2x^2 + x$» es más el tipo de cosa que la gente tiene en mente cuando piensa en una función; pero esa expresión no designa una función, sino que indica más bien un número indeterminadamente, a la manera en que lo hace la «x» misma (FC, pág. 218).

Sin embargo, la gente llama a veces *argumento* de la función a la «x» en expresiones de este tipo, lo cual nos muestra el camino para comprender la noción de función. En las expresiones

$$2 \times 1^2 + 1$$
$$2 \times 4^2 + 4$$
$$2 + 5^2 + 5$$

podemos reconocer la misma función repitiéndose una y otra vez, aunque con diferentes argumentos, a saber 1, 4

y 5. La función es el contenido que es común a estas expresiones. Tal función puede ser representada por «$2(\ )^2 + (\ )$», esto es, lo que queda de «$2x^2 + x$» cuando se eliminan las «x»[1].

El argumento no es una parte de la función, sino que más bien se combina con la función para constituir un todo completo. Una expresión matemática se escinde en dos partes, un signo para un argumento y una expresión para una función. La función es en sí misma algo incompleto, «insaturado» como dice Frege, y así difiere fundamentalmente del número, que, como insistentemente viene repitiendo desde los *Fundamentos*, es un objeto independiente. La incompletud de la función subyacente del párrafo anterior está indicada por la presencia de vacíos en la expresión de las funciones. Podemos ir aquí aún más lejos que Frege y llamar «función lingüística» a una expresión hueca de este tipo, ya que en la *Conceptografía* había mostrado que las proposiciones, al igual que lo que las proposiciones significan, pueden ser divididas en argumento y función. A lo largo de su vida utilizó Frege el término «insaturado» para describir tanto las funciones como los signos de función[2].

Una vez presentadas las nociones de función y argumento, se introduce ahora la noción de *valor*. Los mate-

---

[1] Estoy adaptando aquí el texto de Frege para hacerlo consistente con su actual tesis de que una función es un asunto no de signos sino de cosas significadas. Lo que Frege dice de hecho es: «la particular esencia de la función está contenida en el elemento común de esas expresiones», donde ese elemento común sería algo lingüístico. Así como, en la *Conceptografía*, pasaba a veces Frege a hablar de funciones no lingüísticas cuando oficialmente lo estaba haciendo de funciones lingüísticas, así también aquí pasa a hablar de funciones lingüísticas cuando está hablando de funciones no lingüísticas (véase anteriormente pág. 43, nota 5).

[2] Así, por ejemplo, en su artículo de 1904 «¿Qué es una función?» escribe: «el símbolo de una función está "insaturado", requiere ser complementado con un numeral... A esta peculiaridad del símbolo de función, que hemos llamado la de insaturación, corresponde naturalmente algo en las funciones mismas» (QF, págs. 257-259).

máticos, observa Frege, dicen a veces que cuando dos variables x e y están correlacionadas por una ley, entonces y es una función de x. Pero éste es un modo poco feliz de expresarse. Sería mejor decir que y es el valor de una cierta función para x como argumento. Frege llama «el valor de una función para un argumento» al resultado de completar la función con el argumento en cuestión. Así, por ejemplo, 3 es el valor de la función $2x^2 + x$ para el argumento 1, puesto que tenemos $2 \times 1^2 + 1 = 3$.

El valor de una función matemática, al igual que su argumento, es siempre un número; el valor de la función es el número que está representado por la expresión entera. De modo paralelo, y de acuerdo con la teoría de las funciones lingüísticas dada en la *Conceptografía*, el valor de una expresión funcional para un numeral dado como argumento será un nombre o designación de un número. El paralelismo entre significante y significado es exacto.

Podemos representar los valores de una función para diferentes argumentos dibujando un gráfico. La ecuación «$y = x^2 - 4x$» corresponde a una parábola, en la que comúnmente se dice que «x» indica el valor de la abscisa, o variable independiente, y que «y» indica el valor de la ordenada, o variable dependiente. Frege modifica esta terminología y dice que «x» indica el argumento, e «y» indica el valor de la función.

En este punto introduce Frege una nueva e importante noción: la de *curso de valores* de una función. Si comparamos la función $x^2 - 4x$ con la función $x (x - 4)$, descubrimos que ambas tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento; la misma línea del gráfico corresponde a las dos funciones. En general, y con independencia de lo que x pueda ser,

$$x^2 - 4x = x (x - 4).$$

Según Frege, cuando esto sucede, los cursos de valores de las dos funciones son idénticos. En esta ecuación

no hemos escrito una función igual a la otra, sino sólo asumido que los valores son iguales entre sí. Y si, de este modo, entendemos que esta igualdad ha de ser válida para cualquier argumento con el que sustituyamos a x, entonces estaremos expresando con ello la generalidad de una igualdad. Pero, para esto, también podemos decir: «el curso de valores de la función $x(x-4)$ es idéntico al de la función $x^2 - 4x$», y así tenemos una identidad entre cursos de valores (FC, [págs. 9-10]).

En este difícil pasaje, Frege está comparando y contrastando tres proposiciones diferentes, aunque relacionadas.

La primera es:

La función $x(x - 4)$ es la misma función que $x^2 - 4x$.

Frege dice que esta proposición no es verdadera. No podemos decir que las dos funciones son idénticas, pese a que, para el mismo argumento, cada función arroja siempre el mismo valor que la otra.

La segunda es:

Sea lo que sea x, $x^2 - 4x = x(x - 4)$.

Esta proposición, como dice Frege, afirma que una cierta ecuación es válida universalmente, pues establece que x tiene una cierta propiedad (cae bajo un cierto concepto) con independencia del valor numérico que x pueda tomar. Dentro del dominio de la matemática, esta ecuación generalizada no presupone más tipos de entidades que objetos (números) y sus propiedades.

Y la tercera es:

Las dos funciones, $x(x - 4)$ y $x^2 - 4x$,
tienen un curso de valores idéntico.

Esta afirmación aumenta el contenido de la segunda proposición, pues introduce un nuevo elemento metafí-

sico, el curso de valores, que, al igual que un número, es para Frege un objeto independiente. En apoyo de este último paso, Frege se limita a decir:

> La posibilidad de considerar a la generalidad de una igualdad entre valores de funciones como una identidad entre cursos de valores es, a mi juicio, indemostrable: debe ser tomada como una ley fundamental de lógica (FC, [pág. 10]).

La introducción de una nueva notación, que incluye letras griegas, obedece a la necesidad de distinguir entre la identidad de dos cursos de valores y la generalización de la ecuación entre los valores de una función. Esta última se expresaría normalmente, en la moderna notación equivalente a la de Frege, por

$$(x)\ (x^2 - 4x = x\ (x - 4))$$

La primera es expresada en lenguaje fregeano como:

$$\grave{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \grave{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$$

No puede decirse que Frege aclare aquí demasiado qué tipo de entidad es un curso de valores. Supóngase que tomamos la función $y = 2x$. Si, como dice Frege, el curso de valores de esta función va a ser comparado con la curva de un gráfico, entonces deberíamos esperar que fuese un conjunto de pares ordenados, así

1, 2.
2, 4.
3, 6.

etcétera.

Este conjunto de pares es el que será geométricamente representado por un gráfico en el cual cada uno de los primeros miembros del par aparece como abscisa y cada uno de los segundos miembros aparece como or-

denada. Dos funciones que sean representables por las mismas curvas en un gráfico tendrán el mismo curso de valores.

En sí mismo, no hay en esto nada problemático ni controvertido. Como interpretación de Frege, sin embargo, plantea problemas; pues, como más adelante veremos, sus últimos escritos sugieren una explicación más bien diferente[3] de los cursos de valores. Lo más controvertido en la introducción de este concepto es la insistencia de Frege en que el curso de valores, al igual que el número, es un objeto independiente. Más tarde comprobaremos que con esta insistencia está acumulando dificultades contra sí mismo.

* * *

Así como una variable x indica, según Frege, de manera indeterminada un número, así también podemos indicar indeterminadamente una función, por ejemplo mediante las letras «f» o «F». Ordinariamente se suele escribir «$f(x)$», o «$F(x)$», en donde «x» hace las veces de argumento. Pero lo que realmente indica la función y expresa su naturaleza insaturada es el hecho de que una letra como «F» arrastra consigo un par de paréntesis en cuyo interior hay un hueco[4].

Frege observa que los matemáticos están extendiendo constantemente el significado de la palabra «función», tanto cuando introducen nuevas operaciones para construir funciones como cuando introducen nuevos posibles ar-

---

[3] La comparación entre el curso de valores y un gráfico vuelve a aparecer en la sección 36 de los *Grundgesetze der Arithmetik* aunque aquí se la utiliza para diferentes propósitos.

[4] En sus exposiciones informales, Frege recurrió más tarde al uso de consonantes minúsculas griegas, tales como ξ, para indicar el hueco en una función lingüística insaturada, a diferencia de la x itálica, que indica indeterminadamente el argumento de una función saturada.

gumentos y valores para las funciones, por ejemplo, números complejos.

El uso que hace el propio Frege de la noción de «función» envuelve una nueva, y mucho más fundamental, extensión de esa noción. En la *Conceptografía* (C, página 28) había realizado ya una extensión de este concepto al introducir, además de los signos «+» y «–», que sirven para construir expresiones funcionales en matemática, verbos tales como «mató» o «es más liviano que». En este nuevo contexto efectúa una transición más sutil desde un uso matemático a un uso universal, recurriendo a verbos que son símbolos matemáticos como «=», «≤» o «≥». Consideremos, pues, la función $x^2 = 1$.

> La primera cuestión que aquí surge es la de los valores de esta función para diferentes argumentos. Si ahora reemplazamos sucesivamente a x por –1, 0, 1, 2 obtenemos:
>
> $$(-1)^2 = 1,$$
> $$0^2 = 1,$$
> $$1^2 = 1,$$
> $$2^2 = 1.$$
>
> De estas igualdades, la primera y la tercera son verdaderas, las otras falsas. De esta manera digo: «el valor de nuestra función es un valor de verdad». Y distingo el valor de verdad de lo verdadero del de lo falso. Para abreviar, al primero lo llamo lo Verdadero, al segundo lo Falso (FC, [pág. 13]).

En el caso de la matemática, la expresión funcional, completada con un símbolo para el argumento, se torna en una expresión que tiene por significado el valor de la función para ese argumento. Si vamos a tratar $x^2 = 1$ como una función, entonces «$1^2 = 1$» será una expresión cuyo significado es el valor de esa función para el argumento 1. Lo cual es, según la propuesta de Frege, el valor de verdad Verdadero. Así «$1^2 = 1$» significará lo Verdadero del mismo modo que «2^2» significa 4.

Por otra parte, una ecuación es verdadera en matemáticas si los símbolos que flanquean el signo «=» se refieren al mismo objeto (esto es, al mismo número). Puesto que en el sistema ampliado de Frege las dos expresiones «$3 \geq 2$» y «$5 \leq 7$» significan ambas lo Verdadero, tenemos una ecuación válida de la forma:

$$(3 \geq 2) = (5 \leq 7).$$

La página de «Función y Concepto» que acabamos de comentar contiene un caudal extraordinariamente rico de originales y fecundas ideas filosóficas que habrían de ser desarrolladas en múltiples e influyentes vías no sólo por el propio Frege, sino también por muchos otros filósofos. Pero también hay que decir que este pasaje es al mismo tiempo un paradigma de negligencia filosófica. El lector espera con ansiedad una explicación de lo que el autor entiende por valor de verdad. Es difícil reprimir el sentimiento instintivo de que el signo de igualdad tiene su lugar propio solamente entre numerales, o todo lo más entre nombres, y que no cabe darle este nuevo y extraordinario sentido mediante un simple *fiat*. Pero la única justificación que el lector recibe es que la ampliación de la noción de función es necesaria si hay que mostrar que la aritmética es un desarrollo de la lógica (FC, [pág. 15]). Hasta el presente, sin embargo, no se da explicación alguna sobre la naturaleza de la noción de valor de verdad, ni nada se hace para paliar la incongruencia de utilizar signos de ecuación para ligar proposiciones completas.

En lugar de ello, Frege pone en boca del lector una objeción bastante diferente. Se supone que el lector objeta, no precisamente la idea de asociar las proposiciones con signos de igualdad, sino la posibilidad de que dos proposiciones diferentes sean asociadas al mismo signo de igualdad; «$3 \geq 2$» y «$5 \leq 7$» expresan pensamientos diferentes, ¿cómo pueden entonces ser conjuntadas para formar una ecuación verdadera?

En su respuesta, Frege introduce su famosa distinción entre el sentido y la referencia de una expresión. Supóngase que se nos pregunta: ¿Significa «2 × 2» lo mismo que «12/3»? Tal vez no sepamos cómo responder. Por una parte, quizá nos sintamos inclinados a decir que el sentido es diferente, puesto que las dos expresiones están construidas de modo diferente con elementos diferentes y representan operaciones diferentes sobre números diferentes. Por otra parte, tal vez nos gustase decir que el sentido de las dos expresiones es el mismo, a saber, el número 4. En orden a satisfacer las dos consideraciones, Frege propone que digamos que las expresiones tienen sentidos diferentes, pero la misma referencia. De aquí en adelante, ante una pregunta sobre el sentido de una expresión, tendremos que dilucidar primero si la cuestión se refiere al sentido o a la referencia; y la respuesta puede ser diferente en uno y otro caso[5].

Dos proposiciones diferentes pueden expresar un mismo pensamiento, por ejemplo, dos proposiciones en lenguajes distintos que son una perfecta traducción la una de la otra. Del mismo modo, en circunstancias diferentes, una misma proposición puede expresar dos pensamientos distintos. Una proposición tal como «Yo estoy hambriento» puede ser verdadera en boca de una persona y falsa en la de otra; lo cual muestra que dos pensamientos diferentes están siendo expresados con la misma proposición *(Grundgesetze der Arithmetik*, pág. 14). Frege dice que esto ocurre porque el pronombre «Yo» tiene una referencia distinta en cada caso. Aunque, en general, el hecho de que dos enunciados expresen el mismo pensamiento depende no de la referencia sino del sentido.

---

[5] Para indicar lo que (siguiendo a muchos otros autores) he llamado «referencia», Frege utiliza la misma palabra alemana que de manera bastante general utilizaba antes de 1891 para «significado» o «significación». El pensamiento fregeano puede ser más claramente expuesto si se usa una palabra distinta, y si sentido y referencia son tratados como dos diferentes tipos de significado.

Ahora bien, «2^2» y «2 + 2» tienen la misma referencia, pero diferentes sentidos y, de acuerdo con ello, las proposiciones «$2^2 = 4$» y «$2 + 2 = 4$» expresan pensamientos diferentes. El sentido de una proposición es el pensamiento que es su contenido, y éste a su vez está determinado por los sentidos de las partes constitutivas de la proposición. La referencia de una proposición es su valor de verdad: la referencia de todas las proposiciones verdaderas es lo Verdadero, y la referencia de todas las proposiciones falsas es lo Falso. De nuevo volvemos a encontrarnos aquí con una innovación filosófica espectacular y, hasta el momento, seguimos esperando en vano una justificación adecuada.

En el presente contexto, Frege se muestra más ansioso por desarrollar que por justificar sus tesis filosóficas. De la identidad de referencia, continúa el autor, no se sigue en general la identidad de pensamiento.

> Si decimos «la Estrella de la Tarde es un planeta cuyo periodo de revolución es menor que el de la Tierra», el pensamiento que expresamos es distinto al de la proposición «la Estrella de la Mañana es un planeta cuyo periodo de revolución es menor que el de la Tierra»; pues quien no supiera que la Estrella de la Mañana es la Estrella de la Tarde podría tener a una por verdadera y a la otra por falsa (FC, [pág. 14]).

Dos proposiciones cuyas respectivas partes tienen en una y otra la misma referencia no expresan necesariamente el mismo pensamiento; e igualmente dos proposiciones que son verdaderas (y, por tanto, tienen según Frege la misma referencia) no expresan necesariamente el mismo pensamiento.

Sin embargo, el que una ecuación sea verdadera no depende del sentido de las expresiones que flanquean al signo de igualdad, sino de sus referencias. Así «$2^2 = 2 + 2$» es una ecuación correcta, puesto que la referencia de cada una de las expresiones a uno y otro lado del signo de igualdad es la misma, a saber, el número 4. Y simi-

larmente ocurre cuando adscribimos a las proposiciones valores veritativos que son sus referencias. «La Estrella de la Tarde es un planeta = La Estrella de la Mañana es un planeta» será una ecuación correcta. Las dos proposiciones, dice Frege, tienen que tener la misma referencia, «pues sólo hemos intercambiado en ellas las palabras "Estrella de la Tarde" y "Estrella de la Mañana", que tienen la misma referencia, es decir, son nombres propios del mismo cuerpo celeste».

En *Los fundamentos de la aritmética* había hablado Frege no de funciones sino de conceptos. Aquí procede a reunir las dos nociones. El valor de la función $x^2 = 1$ es siempre uno de los dos valores veritativos. Para el argumento –1, su valor es lo Verdadero; lo cual puede ser expresado diciendo que –1 cae bajo el concepto *raíz cuadrada de 1*. Así pues, un concepto es susceptible de ser exhibido como un cierto tipo de función: una función cuyo valor es siempre un valor veritativo. De este modo cualquier predicado, formado por la supresión de un nombre propio en una proposición, expresará un concepto; lo cual no es aplicable sin embargo a una expresión funcional como «la capital de ...», puesto que el valor de la correspondiente función para un argumento apropiado —por ejemplo, Francia— no será un valor veritativo, sino una ciudad, por ejemplo, París (FC, [página 18]).

Si dos funciones tienen siempre los mismos valores para los mismos argumentos, entonces tienen el mismo curso de valores. Esto es válido tanto para las funciones que son conceptos como para las otras funciones. Estamos ahora en situación de definir la extensión de un concepto como su curso de valores. Tal como dice Frege, podemos llamar extensión al curso de valores de una función cuyo valor para todo argumento es un valor veritativo.

La noción de extensión aquí presentada parece diferir bastante de la introducida en los *Fundamentos*. La noción de extensión fue presentada allí sin explicación al-

guna, y había que asumir que se trataba de la noción utilizada por los lógicos anteriores a Frege, según la cual la extensión de un concepto está dada por los objetos que caen bajo ese concepto: así, la extensión del concepto *caballo* sería todos los caballos que existen[6]. Según la nueva noción, tal como la hemos interpretado anteriormente en este capítulo, la extensión del concepto sería una serie de pares, siendo uno de los miembros de cada par un valor veritativo y el otro miembro un objeto. Los objetos que son de hecho caballos estarían emparejados con lo Verdadero, y los objetos que no son caballos estarían emparejados con lo Falso, de suerte que la extensión del concepto discurriría así:

Bucéfalo:	lo Verdadero,
Alejandro:	lo Falso,
Babieca:	lo Verdadero,
Julio César:	lo Falso,
...	...,
...	...,

etcétera. Dado que el número del número de objetos en el universo es constante, la extensión de cada concepto será del mismo tamaño; las extensiones de conceptos diferentes, si realmente difieren, diferirá solamente en el modo de emparejarlos.

Una clara ventaja de esta noción de extensión sobre la noción tradicional, reside en que ésta proporciona una extensión a cada concepto. En la explicación tradicional era difícil ver cómo conceptos tales como *unicornio* o *no idéntico a sí mismo* podían tener extensión en absoluto, puesto que no hay objetos que caigan bajo tales

[6] O quizá el conjunto de todos los caballos. Pero la diferencia es muy ligera, puesto que los lógicos anteriores a Frege pensaban que un conjunto venía dado por la enumeración de sus miembros. En cualquier caso, incluso en los *Fundamentos*, Frege atribuye extensión a los conceptos vacíos, con lo cual se libra de las confusiones de sus predecesores (veáse la pág. 117 más arriba).

conceptos. Pero en la explicación sugerida por la comparación entre un curso de valores y la curva de un gráfico, la extensión de tales conceptos es exactamente el mismo tipo de cosa que la extensión de cualquier concepto ordinario; la única diferencia estriba en que cada par en esta extensión tendrá como segundo elemento a lo Falso.

Habiéndose concentrado hasta el momento en «Función y Concepto» en ejemplos matemáticos, Frege pasa ahora a considerar proposiciones de todos los tipos, tal como hizo en la *Conceptografía*.

> La proposición «César conquistó la Galia» puede ser dividida en «César» y «conquistó la Galia». La segunda parte es insaturada, contiene un lugar vacío, y sólo cuando este lugar sea ocupado por un nombre propio, o por una expresión que reemplace a un nombre propio, aparece un sentido completo (FC, [pág. 17]).

Pero en lugar de utilizar la palabra «función» para denotar la parte insaturada de la proposición, tal como hizo en la *Conceptografía*, Frege dice ahora: «llamo también "Función" al significado de esta parte insaturada». Y no da como argumento «César», sino César.

Por tanto, los argumentos de funciones no son ahora nombres, sino objetos. Los números no son los únicos objetos susceptibles de figurar como argumentos de funciones; igualmente pueden aparecer personas, ciudades, valores veritativos, cursos de valores de las funciones, extensiones de conceptos y objetos de todo tipo. ¿Qué es entonces un objeto? Frege considera que por su extrema simplicidad la noción no admite ser analizada. «Sólo se puede decir brevemente: objeto es todo lo que no es una función, de manera que su expresión no contiene ningún lugar vacío» (FC, pág. 226).

Una vez ampliado el posible rango de argumentos, necesitamos definir nuestros anteriores signos de función para nuevos posibles contextos. El rigor científico exige,

dice Frege, que nos guardemos de utilizar un signo al que le falte algún significado; así pues, tenemos que definir al signo «más» no sólo para su aplicación entre enteros, sino también para objetos de cualquier tipo.

> Es por tanto necesario producir especificaciones para saber, por ejemplo, a qué va a referirse
>
> $$\odot + 1$$
>
> si ⊙ se refiere al Sol. Es indiferente cómo ocurran estas especificaciones; pero es esencial que se hagan, que «*a* + *b*» tenga siempre una referencia sean cuales sean los símbolos de los objetos determinados que puedan ser insertados en los lugares de «*a*» y de «*b*» (FC, [páginas 19-20]).

Esto satisface la exigencia de Frege de que todo concepto ha de estar nítidamente delimitado: para todo objeto, tiene que ser determinable si el objeto en cuestión cae o no cae bajo el concepto.

A continuación introduce Frege el signo de aserción, el signo para la negación, y el cuantificador universal, especificando la manera de utilizar estos signos para expresar generalizaciones y proposiciones existenciales. En general se atiene a las líneas de exposición adoptadas en la *Conceptografía*, pero con la diferencia de que las reglas son establecidas ahora en términos de la teoría de que la referencia de una proposición es un valor veritativo. Así, en lugar de decir que el cuantificador universal en *(x)* Φ *(x)* significa que la función es un hecho sea cual sea el argumento que podamos tomar, ahora dice que el signo «*(x)* Φ *(x)*» representa lo Verdadero cuando la función Φ *(x)* tiene como valor lo Verdadero para todo argumento. El sentido del signo de aserción es aquí el de afirmar que lo que le sigue designa lo Verdadero.

Las funciones de segundo nivel (que corresponden a lo que Frege llamó «conceptos de segundo orden» en los *Fundamentos)* son introducidas en «Función y Concepto» de la siguiente manera. La expresión «¬*(x)*¬*f(x)*» puede

ser considerada como expresión de una función cuyo argumento es la función indicada por «*f*». Una proposición que establezca que hay cisnes negros adscribe la propiedad de existencia (o más estrictamente, la de estar instanciada) al concepto *cisne negro;* puesto que un concepto es una función, tenemos aquí una función (... *es un cisne negro)* que aparece como argumento de una función de segundo nivel *(tiene un objeto que cae bajo ella).*

> Así como las funciones son fundamentalmente diferentes de los objetos, así también las funciones cuyos argumentos son y deben ser funciones son fundamentalmente distintas de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser ninguna otra cosa (FC, [págs. 26-7]).

Frege procede ahora, tal como ha venido haciendo desde la *Conceptografía*, a introducir funciones de primer nivel con dos argumentos, tales como $x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 9$. A diferencia del primero, el segundo de estos ejemplos es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo. A las funciones de primer nivel de este tipo que contienen dos argumentos las llama Frege relaciones.

De acuerdo con esto, tenemos ahora que distinguir también en las funciones de segundo nivel entre aquéllas cuyo argumento es una función de un argumento, y aquéllas que toman como argumento a funciones de dos argumentos. Las propiedades de las relaciones son funciones de segundo nivel que toman como argumento a funciones de dos argumentos.

Por ejemplo, una relación es simétrica cuando siempre que una cosa guarda esta relación con otra, esa otra cosa guarda también esta misma relación con la primera. (Las relaciones *esposo/a de* y *gemelo/a de* son simétricas; las relaciones *marido de* y *tío de* no lo son.) En símbolos:

$$(x)\ (y)\ (F(x,y) \rightarrow F\ (y,x)).$$

En esta fórmula, la letra «*F*» indica el argumento, y los dos lugares, separados por coma dentro de los parénte-

sis que siguen a «*F*», sirven para mostrar que «*F*» representa una función con dos argumentos. La simetría es así una función de segundo nivel de funciones de primer nivel con dos argumentos.

El reconocimiento de funciones de segundo nivel, dice Frege, representa un paso culminante en el progreso de una sofisticación creciente de la aritmética. Al principio, la gente calculaba con números individuales; luego pasaron a letras algebraicas; más tarde reconocieron funciones de primer nivel e introdujeron variables funcionales; finalmente hemos llegado a las funciones de segundo nivel.

> Cabría pensar que este proceso podría continuar. Pero probablemente este último paso no es ya tan rico en consecuencias como los anteriores; porque, como se mostrará en otro lugar, en lugar de funciones de segundo nivel, es posible recurrir en ulteriores pasos a funciones de primer nivel (FC, [pág. 31]).

Estas palabras son el anuncio del proyecto, a realizar en los *Grundgesetze der Arithmetik*, de utilizar cursos de valores, en lugar de conceptos, como los elementos fundamentales en la construcción de la aritmética.

El artículo «Concepto y Objeto» de 1892 toma como punto de partida una controversia entre Frege y el matemático que había recensionado *Los fundamentos de la aritmética*. El principal punto de discusión gira en torno a la cuestión de si uno y un mismo elemento podría ser a la vez concepto y objeto. Frege lo había negado enfáticamente; su recensor había dicho que semejante situación no era más extraña que el hecho de que una persona sea a la vez padre e hijo. Frege replicó:

> ¡Adoptemos este símil! Si hubiera o haya habido seres que fueran padres pero no pudieran ser hijos, es evidente que tales seres pertenecerían a una especie distinta por completo a la de todos los hombres, que son hijos. Algo semejante acontece aquí (CO, [pág. 193]).

La aplicación del símil no es inmediatamente obvia. En el desarrollo del argumento parece que Frege está, por el momento, concediendo que tal vez los conceptos puedan ser también objetos, aunque rechazando enteramente la idea de que los objetos puedan ser también conceptos. Bajo esta interpretación, los conceptos serían los análogos de los seres humanos, y los objetos serían como los padres que no pudieran ser hijos. En la analogía, ser un hijo es ser predicativo.

«El concepto», dice Frege, «es predicativo». Lo cual está de acuerdo con su doctrina de los *Fundamentos* y de «Función y Concepto». En todos los escritos fregeanos hasta aquí considerados hay una neta relación especial entre un concepto y un predicado; pero la naturaleza exacta de esa relación no ha sido aún aclarada. ¿Es un concepto idéntico a un predicado? ¿Es el sentido del predicado? ¿Es su referencia? Se supone que la amplia explicación que Frege ofrece en «Concepto y Objeto» arroja luz sobre sus anteriores escritos y nos ayuda a responder cuestiones como ésta. De hecho, este artículo plantea más cuestiones de las que responde.

Volvamos a *Los fundamentos de la aritmética*. La nota 87 de esta obra dice:

> Un concepto es para mí un posible predicado de un contenido judicable singular; un objeto es un posible sujeto del mismo. Si en la proposición «La dirección del eje del telescopio es idéntica a la dirección del eje de la tierra» tomamos la dirección del eje del telescopio como sujeto, entonces el predicado es «idéntica a la dirección del eje de la tierra». Esto es un concepto (FA, pág. 173).

Esta nota no es fácil de interpretar. La manera más natural de considerar a un predicado es tomarlo como una pieza del lenguaje, y el recurso a las comillas para introducir su instancia de un predicado parece confirmar que ésta es la interpretación del propio Frege. Sin embargo, en sus anteriores obras, Frege utiliza las comillas

para indicar tanto el significado de los predicados como los predicados mismos, incluso en pasajes en los que claramente está distinguiendo entre los signos y lo que los signos significan[7]. En el presente pasaje, un predicado es un elemento de un contenido judicable, y el ámbito propio de éste no es el del significante, sino el de lo significado. Seguramente Frege no está tomando aquí al concepto como una pieza de lenguaje, sino más bien como algo que de alguna manera subyace tras el lenguaje.

En «Concepto y objeto» admite Frege que la redacción de la nota de los *Fundamentos* inducía a confusión. Sin embargo, su retractación le añade oscuridad:

> Cuando escribí mis *Fundamentos de la aritmética*, aún no había hecho la distinción entre sentido y referencia; y así, lo que ahora designo de manera distintiva con las palabras «pensamiento» y «valor veritativo», lo combinaba entonces en la expresión «contenido judicable» (CO, [pág. 198]).

Dos cosas resultan chocantes en este pasaje. En primer lugar, la confusión en los *Fundamentos* parecía estar referida a la diferencia entre un signo y su significado; aquí en cambio la confusión es identificada con la distinción entre sentido y referencia, formas ambas que están relacionadas con el significado. En segundo lugar, la distinción entre pensamiento y valor veritativo concierne al significado de un enunciado completo; mientras que el punto en vías de clarificación concierne al significado de un predicado (gramatical).

Frege continúa ahora exponiendo su concepción, que, según afirma, en lo esencial sigue siendo la misma. Y lo hace en los siguientes términos:

---

[7] En el curso de mi exposición me he atenido a la convención que el propio Frege introdujo en «Concepto y Objeto» de utilizar letras itálicas para el concepto y reservar las comillas para los elementos lingüísticos.

> En resumen, y tomando «sujeto» y «predicado» en sentido lingüístico, podemos decir: un concepto es la referencia de un predicado; un objeto es lo que nunca puede ser la referencia completa de un predicado, pero puede ser la referencia de un sujeto (CO, [página 198]).

Éste es un pasaje importante. En «Función y concepto» no había quedado claro si un concepto era el sentido o la referencia de un predicado. Por una parte, Frege dice que una función es aquello que está representado por la parte insaturada de una proposición, usando el verbo apropiado para la referencia (FC, pág. 225). Por otra, también dice que un símbolo de función *expresa* una función, y éste es el verbo que comúnmente usa, tanto en sus primeros como en sus últimos escritos, para significar la relación entre un signo y su sentido[8]. En cuanto a la referencia de un predicado, el curso de valores de un concepto podría haberse presentado como mejor candidato que el concepto mismo para ser tal referencia. Sin embargo, aquí en «Concepto y objeto», y en varios pasajes posteriores, Frege es bastante explícito afirmando que el concepto es la referencia, no el sentido, del predicado.

Si un concepto es la referencia de un predicado, podemos preguntarnos: ¿cuál es entonces el sentido del predicado? Algunos pasajes de Frege dan la impresión de que no hay respuesta a esta cuestión y que un predicado no tiene sentido. Pero de ser así, ¿qué objeto tiene hacer una distinción entre sentido y referencia en el caso de un predicado? Solamente en algunos escritos inéditos aparece una clara respuesta a esta cuestión: así como un predicado es la parte insaturada de una proposición, así también el sentido de un predicado es la

[8] Véase, más explícitamente, *Grundgesetze der Arithmetik*, pág. 7: «Digo además que lo que un nombre *expresa* es su sentido, y lo que *representa* es su referencia.»

parte insaturada del pensamiento que es el sentido de la proposición[9].

Sin embargo, Frege está aquí principalmente interesado no en determinar el sentido y la referencia de los predicados, sino en contrastar los predicados con los nombres propios. Un nombre propio, nos dice, no es susceptible de ser utilizado como predicado gramatical.

Para ilustrar este punto podemos considerar estas dos proposiciones:

(1) Charlotte Brontë era escritora de libros,
(2) Charlotte Brontë era Currer Bell.

A primera vista parece que «era Currer Bell» es un predicado equiparable al de «era escritora de libros», lo cual proporciona un contraejemplo a la tesis de que un nombre propio no puede ser usado como predicado. Pero tras esto, dice Frege, se oculta una errónea interpretación del verbo «ser».

En el primer ejemplo, «era» es simplemente una cópula, una marca de predicación: esto es claro por el hecho de que (1) es sinónimo de

(3) Charlotte Brontë escribió libros.

Ésta es una proposición que establece que Charlotte Brontë cae bajo el concepto *escribió libros*, y donde la cópula ha desaparecido totalmente. En cambio, el verbo «ser» funciona en (2) como marca de una ecuación o identidad, exactamente como el signo «=». Así (2) es sinónimo de

[9] Esto está más claramente expuesto en el artículo escrito en 1906 «Introducción a la lógica» y publicado póstumamente. Tras afirmar que las proposiciones expresan pensamientos, y que las proposiciones, además de partes completas (nombres propios), tienen también partes insaturadas, continúa diciendo: «A la parte insaturada del pensamiento la concebimos también como un sentido: el sentido de la parte de la proposición que es distinta del nombre propio» (NS, página 209).

(4) Charlotte Brontë = Currer Bell.

Ésta es una proposición que adscribe dos nombres propios diferentes a una y la misma persona. Obsérvese que (3) y (4) son proposiciones de tipos muy diferentes: una ecuación es reversible, mientras que un objeto que cae bajo un concepto es una relación irreversible.

El nombre, o pseudónimo, «Currer Bell» no figura como un predicado en (2) o en (4); es sólo una parte del predicado. Lo cual puede quedar clarificado si reescribimos (2) como

(5) Charlotte Brontë no era otra que Currer Bell,

donde «no era otra que Currer Bell» representa para Frege un concepto, un concepto que tiene bajo sí solamente un objeto.

Como criterio general para distinguir entre conceptos y objetos, Frege indica el hecho de que el artículo determinado singular indica siempre un objeto, mientras que el artículo indeterminado acompaña a la palabra-concepto. El alemán y el español son lo suficientemente similares para que este criterio no sea ni más ni menos plausible en una lengua que en otra.

Frege afirma que difícilmente se pueden encontrar excepciones a la tesis sobre el artículo determinado. Proposiciones como «Un hombre está sentado en el cuarto de estar» o «Schopenhauer compró un perro» son para Frege contra-ejemplos sólo aparentes. Cada una de las proposiciones nos dice que hay algún objeto que cae bajo un concepto, en la primera el concepto *hombre sentado en el cuarto de estar*, y en la segunda, el concepto *perro comprado por Schopenhauer*. En uno y otro casos, la palabra acompañada por el artículo indeterminado se torna en uno de los componentes del concepto.

Respecto al artículo determinado singular, la única excepción que Frege reconoce es el caso en donde un término singular puede ser considerado como represen-

tante de un plural. Y considera dos casos. En «El Turco sitió a Viena» afirma que «El Turco» es obviamente el nombre propio de un pueblo, mientras que «El caballo es un animal de cuatro patas» expresa un juicio universal que sostiene que todos los caballos son animales de cuatro patas.

Las palabras «todo», «cada», «no», «alguno», así como la palabra «un», se asocian gramaticalmente con palabras-concepto, no con nombres propios. Pero en proposiciones como

(6) Todos los mamíferos son habitantes terrestres

lo que realmente estamos haciendo es expresar relaciones entre conceptos. Según esto, las anteriores palabras están asociadas no con las palabras-concepto particulares que inmediatamente las siguen, sino con la proposición considerada como un todo. Esto es, por supuesto, lo que acontece si reemplazamos esas palabras del lenguaje ordinario por la notación cuantificacional de la *Conceptografía*.

El lenguaje común produce la impresión de que «todos los mamíferos» es el sujeto lógico de una proposición como (6). Esta impresión es bastante ilusoria, como puede comprobarse fácilmente al considerar la negación. Si «Todos los mamíferos» fuera el sujeto de (6), entonces su negación sería

(7) Todos los mamíferos no son habitantes terrestres

en lugar de ser, como obviamente es,

(8) No todos los mamíferos son habitantes terrestres.

Al igual que las palabras de cuantificación más arriba enumeradas, las expresiones como «Hay un...» o «Existe un...» se asocian con conceptos, no con objetos. Todas ellas son expresiones que no pueden ir ligadas con sen-

tido a nombres de objetos. «Hay Julio César» no es para Frege ni verdadera ni falsa, sino que carece de sentido; y ninguna proposición bien formada podría contener expresiones como «todo Julio César» o «algún Julio César». Si en una proposición genuina, una de estas expresiones cuantificacionales figura asociada con lo que parece ser un nombre propio, podemos estar seguros de que lo que realmente tenemos ante los ojos es una palabra-concepto disimulada. Éste es el tratamiento que Frege da a proposiciones como «Trieste no es ninguna Viena» y «Hay solamente una Viena»: en cada una de estas instancias, «Viena» está siendo usada como una palabra-concepto, equivalente quizá a «ciudad como Viena».

Los criterios de Frege para distinguir entre conceptos y objetos son esencialmente criterios gramaticales para distinguir las expresiones-concepto de las palabras-objeto. A la objeción de que las reglas lógicas no pueden estar basadas en distinciones lingüísticas, Frege replica que las reglas lógicas no pueden ser establecidas sin recurrir a la comprensión del lenguaje natural, y que lo que aquí está ofreciendo no son definiciones formales, sino sólo claves que ayuden a clarificar la comprensión. Ningún lenguaje formal podría sustituir al lenguaje ordinario en la comunicación de este entendimiento; pues sólo la persona que pudiera ya distinguir en el lenguaje ordinario entre nombres y predicados sería capaz de trasladar correctamente tal distinción a un lenguaje formal.

La tesis principal de «Concepto y objeto» es que entre conceptos y objetos hay un abismo infranqueable de tal naturaleza que lo que puede decirse con sentido del uno no puede ser dicho con sentido del otro. Los objetos caen bajo los conceptos; los conceptos no pueden hacerlo. Una vez establecida esta verdad, Frege procede a acumular objeciones a ella y a responderlas una por una.

(i) Los conceptos pueden seguramente tener propiedades: y tener una propiedad es caer bajo un concepto.

Frege afirmó ciertamente en *Los fundamentos de la aritmética*, y vuelve a repetirlo aquí, que los conceptos

tienen propiedades, y que los conceptos mantienen relaciones con otros conceptos. Tales casos se dividen en dos diferentes grupos.

(a) Un concepto de primer nivel puede estar subordinado a otro concepto de primer nivel. Así, el concepto *mamífero* está subordinado al concepto *animal;* y *animal* es un componente del concepto *mamífero,* pero no es una propiedad de él. Sin embargo, tanto *animal* como *mamífero* son propiedades de, digamos, El perro de Schopenhauer, La reina de Saba; es decir, La reina de Saba cae bajo los dos conceptos (CO, pág. 246).

(b) Un concepto de primer nivel puede caer bajo un concepto de segundo nivel. Así un concepto puede tener propiedades tales como poseer instancias, o tener cuatro objetos que caen bajo él. Por ejemplo, la proposición

El concepto *raíz cuadrada de 4* está instanciado

atribuye al concepto en cuestión la propiedad de instanciación, lo cual es lo mismo que decir que cae bajo un concepto *instanciado* de segundo nivel. A propósito de esto dice Frege:

> La relación de un objeto respecto a un concepto de primer nivel bajo el cual cae, es distinta de la relación, ciertamente semejante, de un concepto de primer nivel respecto a un concepto de segundo nivel. Para hacer justicia a la diferencia y a la semejanza, tal vez se podría decir que un objeto cae *bajo* un concepto de primer nivel y que un concepto cae *en* un concepto de segundo nivel (CO, pág. 246).

(ii) Frege había aducido como criterio gramatical para distinguir el objeto del concepto, que un artículo determinado precediendo a una expresión era una segura indicación de que esa expresión designaba un objeto, no un concepto. Si aceptamos este criterio, nos veremos en apuros para interpretar la proposición siguiente:

(9) El concepto *caballo* es un concepto fácilmente alcanzable.

Puesto que la expresión «el concepto *caballo*» comienza con un artículo determinado, deberá, según el criterio de Frege, referirse a un objeto. Por otra parte, desde el punto de vista de su contenido, se refiere con seguridad a un concepto. Por tanto, el criterio para distinguir concepto y objeto se viene abajo.

La respuesta de Frege a este problema es rotunda. Aborda el primer cuerno del dilema reconociendo que las tres palabras «el concepto *caballo*» designan un objeto, pero precisamente por ello no designan concepto alguno (CO, [pág. 195]). Admite que se trata de una situación un tanto embarazosa: la ciudad de Berlín es una ciudad, y el volcán Vesubio un volcán; ¿por qué el concepto *caballo* no es entonces un concepto? Según Frege, la dificultad no hay que achacarla más que a una inevitable rudeza del lenguaje natural.

> En las discusiones lógicas es frecuente que uno tenga necesidad de afirmar algo de un concepto, y de expresar también tales afirmaciones en la forma habitual, es decir, haciendo que lo afirmado del concepto sea el contenido del predicado gramatical. En consecuencia, sería de esperar que la referencia del sujeto gramatical fuera el concepto; pero el concepto como tal no puede desempeñar este papel, dada su naturaleza predicativa; primeramente tiene que ser transformado en un objeto o, dicho con mayor precisión, debe ser reemplazado por un objeto (CO, [pág. 197], cfr. GA, pág. 8)

Frege distingue entre el caso en que «el concepto *F*» ocurre como sujeto gramatical y el caso en que aparece como predicado gramatical. Si tal expresión ocurre dentro de un predicado gramatical, entonces tenemos simplemente un circunloquio; por ejemplo,

(10) Jesús cae bajo el concepto *hombre*

no dice ni más ni menos que

(11) Jesús es un hombre.

Pero una reducción tan simple no es posible cuando «el concepto *F*» ocurre en el lugar del sujeto.

Todos los comentaristas de Frege cuya simpatía por él es manifiesta se muestran reacios a defenderlo en este punto. Encuentran difícil digerir su afirmación de que el concepto *caballo* no es un concepto. Al menos, dicen, debería haberse defendido de sus críticos diciendo que toda proposición cuyo sujeto gramatical sea «El concepto...» está mal formada. No debería haber admitido que «El concepto *caballo* es un concepto» pueda ser falsa; es sencillamente un sinsentido.

Pienso que los críticos de Frege están creando innecesarias dificultades en este caso, y que el mismo Frege, en una nota a pie de página de «Concepto y objeto», dio una amplia justificación para su afirmación de que el concepto *caballo* no es un concepto. En esa nota escribió:

> Algo semejante sucede cuando, con referencia a la proposición «esta rosa es roja», decimos: el predicado gramatical «es roja» pertenece al sujeto «esta rosa». Aquí, las palabras «el predicado gramatical 'es roja'» no son un predicado gramatical, sino un sujeto. Justamente por el acto de llamarlo explícitamente predicado, le robamos esta propiedad (CO, [págs. 196-7, n. 8]).

Supóngase que deseamos asignar la palabra «nada» a una categoría gramatical. Podíamos intentar hacerlo escribiendo primero

(12) nada es un verbo,

pero esto produce no una proposición, sino una incorrecta concatenación de palabras. El modo correcto de hacerlo es

(13) «nada» es un verbo.

Creo que pocas personas admitirían que esta proposición no es verdadera. Sin embargo, la expresión que aparece como sujeto de esa proposición no es un verbo, sino un nombre, formado al envolver con comillas el anterior verbo. Por la misma razón, la proposición

(14) «nada» es un nombre

es también falsa. Pero no hay ningún misterio en esto, al igual que no lo hay en el hecho de que mientras «Julio César» es un nombre, la proposición

(15) Julio César es un nombre

es falsa.

La relación entre ξ *es un caballo* y el concepto *caballo* ha de ser entendida sobre la base de este paralelismo. Si escribimos

(16) ξ *es un caballo* no es un concepto

no producimos una proposición, sino una muestra de un sinsentido.

Si, en cambio, escribimos,

(17) el concepto *caballo* no es un concepto,

hemos obtenido algo que no es necesariamente un sinsentido, pero que puede ser entendido en más de un modo.

Consideremos las siguientes proposiciones:

(18) el verbo «nada» no es un verbo,
(19) 'el verbo «nada»' no es un verbo,
(20) el verbo '«nada»' no es un verbo.

De estas tres proposiciones, (18) es claramente falsa y (19) claramente verdadera, mientras que (20) requiere tiempo de reflexión. Es ciertamente verdadero que '«nada»' no es un verbo, pero esto es todo lo que la tercera proposición dice. Nos sentimos remisos a decir que la tercera proposición es verdadera, porque las primeras comillas están precedidas por la expresión «el verbo». Creo que esta tercera proposición es la clave para entender la afirmación fregeana de que el concepto *caballo* no es un concepto. La expresión «el concepto...» sirve realmente para cumplir respecto a los conceptos el mismo papel que cumplen las comillas respecto a los predicados. Ésta es la función principal de la mencionada expresión; y si así se la entiende, entonces la proposición «el concepto caballo no es un concepto» es indudablemente verdadera, tal como

(21) '«nada»' no es un verbo

es verdadera. La expresión «el concepto *caballo*» está construida según el modelo de la expresión equívoca 'el verbo '«nada»' en (20), y aquí está la razón del feroz ataque de los críticos contra Frege. Pero el propio Frege considera tal expresión como una simple rudeza del lenguaje, no más digna de atención al ocuparnos de lógica que la que prestamos a la diferencia entre «y» y «pero», o entre «perro» y «chucho». Según esto, creo que Frege está justificado al decir que la proposición «el concepto *caballo* no es un concepto» no proporciona ningún contraejemplo a su afirmación de que entre objetos y conceptos se extiende un abismo.

Capítulo VII

Sentido y referencia

La distinción entre sentido y referencia, introducida por primera vez en «Función y Concepto» en 1891, fue desarrollada por Frege en otro ensayo escrito paralelamente al primero, aunque publicado en 1892. Este segundo artículo, «Sentido y Referencia», presenta argumentos, y responde a objeciones, en favor de las tesis más enigmáticas que en el primero de los textos habían sido establecidas demasiado escuetamente.

El ensayo comienza planteando una cuestión acerca de la identidad. ¿Es la identidad una relación? Si lo es, ¿se trata de una relación entre objetos, o entre signos de objetos? La segunda alternativa parece más plausible, pues —tomando el ejemplo utilizado en «Función y Concepto— «la estrella de la mañana = la estrella de la mañana» es un enunciado muy diferente en valor cognitivo de «la estrella de la mañana = la estrella de la tarde». El primero es analíticamente verdadero, mientras que el segundo registra un descubrimiento astronómico. Si tuviésemos que considerar a la identidad como una relación entre lo que los signos representan, sería evidente que si «$a = b$» es verdadero, entonces «$a = a$» no podría diferir de «$a = b$». «Se habría expresado, en tal caso, una relación de una cosa consigo misma, y además una relación tal que se da en cada cosa respecto de sí misma,

pero que ninguna cosa tiene respecto de cualquier otra» (SR, [pág. 26]*)

Parece natural concluir, por tanto, que las ecuaciones expresan relaciones entre signos, y que «*a* = *b*» dice que los signos «*a*» y «*b*» designan la misma cosa. Ésta era la concepción mantenida por Frege en la Sección 8 de su *Conceptografía,* en donde al introducir un signo para la identidad de contenido afirmaba que este signo expresaba la circunstancia de que dos nombres tuvieran el mismo contenido.

Pero hay una objeción a esta concepción. Los nombres son arbitrarios, y si toda proposición de la forma «*a* = *b*» significara realmente una relación entre símbolos, entonces no podría expresar conocimiento alguno del mundo extra-lingüístico. «La estrella de la tarde = la estrella de la mañana» se limitaría a registrar un hecho léxico en lugar de uno astronómico. Esta dificultad no se le ocultaba a Frege al tiempo de redactar su *Conceptografía,* en donde dice que la necesidad de contar con un símbolo para la igualdad de contenido se apoya en el hecho de que un mismo contenido puede ser totalmente determinado de diferentes maneras (como él mismo ilustra con un ejemplo geométrico); y que un juicio sintético de identidad establece que el mismo contenido puede ser dado mediante dos modos de determinarlo (véase pág. 51).

En «Sentido y Referencia» dice que un enunciado de identidad puede ser informativo sólo si la diferencia entre los signos corresponde a una diferencia en el modo de presentación de lo que con ellos es designado.

> Sean *a*, *b*, *c* las rectas que unen los ángulos de un triángulo con el punto medio de los lados opuestos. El punto de intersección de *a* y *b* es entonces el mismo

* Para el criterio de paginación de los ensayos de semántica tratados en este capítulo, véase la primera nota de la página de abreviaturas en las referencias a las obras de Frege que figura al principio de este libro *[N. del T.].*

> que el punto de intersección de *b* y *c*. Tenemos, pues, designaciones distintas para el mismo punto, y estos nombres («intersección de *a* y *b*», «intersección de *b* y *c*») indican al mismo tiempo el modo de darse el punto; y de ahí resulta que en el enunciado esté contenido auténtico conocimiento (SR, [pág. 26]).

Este modo de presentación es lo que constituye el *sentido* del signo. La referencia de las dos expresiones entrecomilladas en el pasaje anterior es la misma, pero el sentido de cada una es diferente.

Podemos decir, por tanto, que un enunciado de identidad será verdadero e informativo si el signo de igualdad está flanqueado por dos nombres que tienen la misma referencia pero diferentes sentidos. Como el ejemplo muestra, la palabra «nombre» es utilizada en un sentido amplio para incluir designaciones complejas de objetos. Frege está dispuesto a llamar «nombres propios» a tales designaciones.

En su versión madura del significado hay elementos a tres niveles: signos, sus sentidos y sus referencias. Los signos, podemos decir, expresan sus sentidos y representan, o denotan, sus referencias. Al usar signos expresamos un sentido y denotamos una referencia (SR, [pág. 31]).

En un lenguaje que estuviera perfectamente regulado, cada signo tendría un, y sólo un, sentido. En los lenguajes naturales, un signo puede tener más de uno: una palabra como «equipo» es ambigua; para tener un sentido preciso, la expresión «el perro» requeriría suplementaciones diferentes en diferentes hogares; eruditos distintos darían explicaciones distintas del nombre «Aristóteles». Frege reconoce que habremos de darnos por satisfechos con que la misma palabra tenga el mismo sentido dentro del mismo contexto. Aunque en un lenguaje ideal cada signo tendría que tener únicamente un sentido, no es necesario, incluso en un lenguaje ideal, que cada sentido tenga únicamente un signo. En el mundo real, el mismo sentido puede ser expresado por diferentes sig-

nos en diferentes lenguajes o incluso dentro de un mismo lenguaje.

En una buena traducción, el sentido del texto original es lo que tiene que ser preservado. Lo que en la traducción se pierde no es el sentido sino, al decir de Frege, «el colorido y los contrastes con que la elocuencia poética busca revestir al sentido». Y esto es algo que no es objetivo a la manera en que el sentido es objetivo.

No todo sentido tiene su correspondiente referencia. Las expresiones «El cuerpo celeste más alejado de la Tierra» y «La serie menos convergente» tienen ambas sentido, pero la primera probablemente, y la última ciertamente, carecen de referencia y no representan a ningún objeto. Y a la inversa, uno y el mismo objeto puede ser denotado por expresiones con sentidos bastante diferentes: de este hecho parte la primera formulación de la distinción fregeana. Si conociéramos todo lo que es posible conocer acerca de un objeto sabríamos qué sentidos servirían para identificarlo y cuáles no. Pero, por supuesto, los humanos no alcanzamos nunca tal conocimiento.

El sentido de una palabra es lo que captamos cuando entendemos esa palabra. El sentido es muy diferente de una representación o imagen mental, aun en el caso de que se puedan muy bien tener representaciones mentales asociadas con él cuando el signo se refiere a un objeto tangible. Las imágenes son subjetivas y varían de persona a persona, y de tiempo en tiempo incluso en la misma persona; pero el sentido de un signo, afirma Frege, «puede ser propiedad común de muchos y no es por tanto parte o modo de la mente individual».

Frege ofrece la siguiente analogía de la relación entre referencia, sentido, e imagen o representación mental:

> Alguien observa la Luna a través de un telescopio. Comparo la Luna con la referencia; es el objeto de observación, que es proporcionado por la imagen real que queda dibujada sobre el cristal del objetivo del in-

terior del telescopio, y por la imagen en la retina del observador. La primera imagen la comparo con el sentido; la segunda con la representación o intuición. La imagen formada dentro del telescopio es, en verdad, sólo parcial; depende del lugar de observación; pero con todo es objetiva, en la medida en que puede servir a varios observadores. Podría incluso disponerse de modo que pudieran utilizarla varios simultáneamente. Pero, de las imágenes retinianas, cada uno tendría la suya propia (SR, [pág. 30]).

Una imagen es *mi* imagen o *tu* imagen; pero un sentido no tiene, de la misma manera, un propietario. El que los sentidos sean públicos y comunes es lo que permite que los pensamientos puedan ser transmitidos de una generación a otra.

Sabemos, desde «Función y Concepto», que no son sólo los nombres propios —simples o complejos— los que tienen sentidos y referencias. ¿Qué ocurre con las proposiciones completas, que expresan pensamientos? ¿Es el pensamiento —el contenido del enunciado— el sentido o la referencia de un enunciado?

Supongamos que el enunciado tiene una referencia. Si sustituimos en él una palabra por otra de la misma referencia, pero de distinto sentido, esto no podrá tener ningún efecto sobre la referencia del enunciado. Sin embargo, vemos que, en tales casos, el pensamiento cambia; pues, por ejemplo, el pensamiento del enunciado «el lucero matutino es un cuerpo iluminado por el sol» es distinto del enunciado «el lucero vespertino es un cuerpo iluminado por el sol». Alguien que no supiera que el lucero vespertino es el lucero matutino podría tomar un pensamiento por verdadero y el otro por falso. El pensamiento no puede, pues, ser la referencia del enunciado; por el contrario, deberemos concebirlo como su sentido (SR, [pág. 32]).

Frege está utilizando claramente un criterio tácito para la identidad de pensamientos: dos pensamientos son idénticos si y sólo si no es posible mantener que uno

de ellos es verdadero sin mantener que el otro también lo es. Lo cual sugiere un criterio general para la identidad de sentidos: dos sentidos serían el mismo si y sólo si fuera imposible captar a ambos sin percatarse de que uno y otro determinaban la misma referencia. Pues el valor veritativo de una proposición es su referencia, como ya sabemos por «Función y Concepto».

Aquí, en «Sentido y Referencia», se aporta un argumento en favor de esa afirmación anterior.

> ¿Acaso el enunciado entero tiene sólo sentido, pero no referencia? En todo caso, es de esperar que se den tales enunciados, lo mismo que hay partes de un enunciado que tienen sentido, pero no referencia. Y los enunciados que contienen nombres propios sin referencia serán de este tipo. El enunciado «Ulises fue dejado en Itaca profundamente dormido» tiene evidentemente un sentido. Pero, como es dudoso que el nombre «Ulises» que aparece en él tenga una referencia, también es dudoso que lo tenga el enunciado entero (SR, [pág. 32]).

El argumento parece discurrir así. Hemos de esperar que la referencia de un enunciado esté determinada por la referencia de las partes de ese enunciado. Preguntemos, por tanto, qué es lo que falta en un enunciado si una de sus partes no tiene referencia. Si estuviésemos interesados sólo en el pensamiento, no nos importaría que «Ulises» tuviera o no una referencia, pues el pensamiento sigue siendo el mismo en uno y otro caso, ya que está determinado por los sentidos, y no por las referencias, de las partes constituyentes de la proposición.

Sólo cuando se desea seriamente tomar al enunciado por verdadero o por falso es cuando se siente la necesidad de adscribir una referencia a «Ulises»; porque en otro caso no habría nada que que nos permitiera decidir si el predicado a él atribuido era verdadero o falso.

> ¿Por qué queremos que cada nombre propio no tenga únicamente un sentido, sino también una referencia?

¿Por qué no nos basta el pensamiento? Porque, y en la medida en que, nos interesa su valor veritativo (SR, [pág. 33]).

El sentido y las imágenes con él asociadas son suficientes para hacernos gozar con un poema épico: lo que nos empuja a avanzar del sentido a la referencia es la actitud de investigación científica, la búsqueda de la verdad. Nos vemos por tanto forzados, afirma Frege, a aceptar que la referencia de una proposición es su valor veritativo, lo Verdadero o, en su caso, lo Falso. Toda proposición indicativa seriamente propuesta es un nombre de uno u otro de estos dos objetos. Todas las proposiciones verdaderas tienen la misma referencia, y lo mismo ocurre con todas las proposiciones falsas.

La tesis de Frege de que la relación entre una proposición y su valor veritativo es la misma que la que hay entre un nombre y su referencia, está conectada con su distinción general entre predicación y aserción. Es sin duda más natural pensar que la relación entre un pensamiento y su verdad es similar a la que se da entre sujeto y predicado: cabría perfectamente decir, «El pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero». Pero, observa Frege, el pensamiento que esa proposición completa expresa es exactamente el mismo pensamiento que el contenido en la proposición más simple «5 es un número primo». (Lo cual está de acuerdo con el criterio tácito para la identidad de pensamientos mencionado más arriba.) Estas dos proposiciones tienen el mismo sentido, y las dos son nombres de lo Verdadero; pero sólo cuando se las afirma es cuando dicen que son nombres de lo Verdadero.

Sujeto y predicado (entendidos en sentido lógico) son partes del pensamiento; para el conocimiento, se hallan en un mismo nivel. Ensamblando sujeto y predicado siempre se consigue únicamente un pensamiento, pero no se pasa nunca de un sentido a su referencia, de un pensamiento a su valor veritativo (SR, [pág. 35]).

Al formular un juicio, que no es la mera captación de un pensamiento, sino una aceptación de su verdad, es cuando damos el paso desde el nivel del pensamiento al nivel de la referencia. La diferencia entre aserción y predicación viene indicada en el lenguaje ordinario por el modo gramatical, por el contexto y por convención. En el sistema formal de Frege, como ya hemos visto al considerar la *Conceptografía,* esta diferencia está marcada por el uso de un signo especial de aserción.

A lo largo de los escritos de Frege, al menos dos funciones diferentes son atribuidas al signo de aserción. A veces este signo es considerado como señal de que lo que sigue está tomado en serio; esto es, que la expresión que sigue al signo ha de ser tomada absolutamente en serio, no como parte de alguna charada o ficción. Otras veces, el signo es tomado como marca del modo asertórico, como cuando se dice que su función es la de distinguir una aserción de una suposición o de una pregunta.

Frege trata al signo de aserción como señal de que lo que sigue ha de ser tomado seriamente cuando dice que en la ficción sólo estamos interesados en el sentido de las proposiciones y no en sus valores veritativos. Los actores en el escenario utilizan palabras que son signos que únicamente tienen sentido; cuando la misión del signo de aserción es la de afirmar que la referencia de lo que le sigue es lo Verdadero, no puede ser usado en conjunción con signos que no tienen referencia, y por tanto no puede ser usado por un actor en el escenario. En la concepción de Frege, el signo de aserción viene a ser algo semejante al signo de la clave de sol. La clave muestra cómo hay que leer cada una de las notas que la siguen; similarmente, el signo de aserción muestra que cada palabra que tras él aparece ha de ser tomada seriamente.

Pero tal vez resulte un tanto pueril introducir un signo de aserción para denotar que una proposición ha de ser tomada seriamente. Si tuviéramos que asegurarnos de que una proposición ordinaria ha sido tomada en serio, igualmente cabría dudar de que una proposición prece-

dida de un signo de aserción tenga que ser tomada seriamente. Según Frege, el actor que dice en el escenario «el pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero» no realiza una aserción más seria que cuando dice «5 es un número primo» (SR, [pág. 34]). Pero, por la misma razón, un actor que en el curso de una representación escribiera en una pizarra esa proposición precedida de un signo de aserción, tampoco haría con ello ninguna aserción seria.

Que una expresión sea tomada en serio es una cuestión que no depende de que tal expresión sea emitida en modo asertórico. La pregunta «¿Querías decir eso seriamente?» puede ser planteada con igual propiedad ante un mandato que ante una proposición. Incluso en el caso de las suposiciones, que son los favoritos ejemplos fregeanos de proposiciones que no son aserciones, hay diferencia entre una mera fantasía y una hipótesis que se propone con vistas a una ulterior exploración[1].

Existen sin duda medios para marcar la diferencia entre el modo asertórico y los restantes, y los lenguajes naturales disponen de tales signos en las inflexiones verbales y los verbos auxiliares. Pero no es necesario recurrir a esos signos para exponer el sistema de Frege, puesto que, ignorando explícitamente los otros modos, Frege se centra exclusivamente en los enunciados asertóricos, los únicos útiles para su propósito general de describir, y en parte construir, un lenguaje que sea apropiado para los fines de la ciencia teórica.

El hecho de aceptar la distinción entre aserción y predicación, y la diferencia entre el modo asertórico y los restantes, no nos fuerza, como Frege parece creer, a adoptar los valores veritativos como referencias de las proposiciones. Es cierto que si un valor veritativo es un objeto, entonces no puede ser representado por un predicado (que tiene que corresponder a algo insatu-

---

[1] Este tema ha sido tratado más ampliamente en mi libro *Will, Freedom and Power*, págs. 36-38.

rado, como un concepto). Pero su conversa no es cierta.

Frege puede tener razón cuando dice que «... es verdadero» no es un predicado genuino y que no expresa ninguna función. Pero este argumento parece envolver dos suposiciones adicionales: (1) Las únicas entidades en el mundo que corresponden al lenguaje son los objetos y las funciones; por tanto, si la verdad no es una función tendrá que ser un objeto. (2). La única relación que un objeto puede tener con el lenguaje es la de ser la referencia de un nombre; por tanto, la verdad será algo que es nombrado por las proposiciones verdaderas. Mas, ¿por qué no ha de haber elementos del lenguaje que no sean nombres ni funciones lingüísticas? ¿No es el propio signo de aserción de Frege un elemento de este tipo? Y si lo es, ¿por qué «... es verdadero» no es también otro elemento semejante?

Algunos filósofos han pensado que, tanto para una proposición como para un pensamiento, ser verdadero significa estar en correspondencia con algo extralingüístico y extramental: un hecho quizá, o un estado de cosas, o lo que Frege llamó en la *Conceptografía* una circunstancia. Hay graves dificultades en identificar los hechos, o estados de cosas, o las circunstancias, con aquello a lo que al parecer corresponden las proposiciones verdaderas; pero es sorprendente que Frege no haya considerado aquí esta posibilidad, aunque sólo fuera para rechazarla.

En realidad Frege no habla de hechos, sino de partes de valores veritativos. Aunque se apresura a aclarar:

> La palabra «parte» la he utilizado aquí de una manera peculiar. En efecto, la relación del todo a la parte en el enunciado la he transferido a su referencia, al denominar a la referencia de una palabra parte de la referencia del enunciado cuando esa misma palabra es parte de este enunciado (SR, [págs. 35-6]).

Frege admite que sus palabras puedan suscitar una serie de objeciones, pues «en el caso de la referencia, la otra parte no queda determinada por el todo y la parte

escogida». De hecho, Frege continuó debatiéndose con este problema, sin llegar jamás a resolver satisfactoriamente, ni siquiera para sí mismo, la dificultad aquí planteada. Por el momento se contenta con decir que tal vez debería ser inventada una palabra distinta a «parte». En los tres niveles del sistema fregeano correspondientes a una proposición que contiene un nombre hay tres diferentes y paralelas relaciones de parte a todo cuya oscuridad va en aumento.

En primer lugar, en el nivel de los signos está la distinción entre función y argumento dentro de las proposiciones, de acuerdo con la división lingüística de función/argumento con que la *Conceptografía* reemplazaba la tradicional distinción entre sujeto gramatical y predicado gramatical. Así, en la proposición «Nerón tocaba la lira», las partes son el nombre «Nerón» y el predicado «... tocaba la lira».

En segundo lugar, en el nivel del sentido, hay dos elementos: el sentido del nombre en cuestión, y el sentido expresado por los predicados: en el caso que nos ocupa, *el quinto Emperador Romano* (o algo semejante), y todo lo que uno capta cuando entiende el predicado «... tocaba la lira». Estas partes constituyen el todo, que es un pensamiento: el pensamiento de *que Nerón tocaba la lira*.

Finalmente, en el nivel de la referencia, están el todo, que es un valor veritativo, y al menos una parte que Frege identifica: la referencia del nombre, que en este caso es el Emperador Nerón mismo. En «Sentido y Referencia», Frege es muy impreciso respecto a la otra parte, «el resto»; pero sabemos por «Concepto y objeto» que esa parte tiene que ser el concepto ξ *tocaba la lira*[2].

Cabría esperar que al nivel de la referencia las dos partes fueran la referencia del nombre, Nerón, y la extensión del concepto ξ *tocaba la lira*. Pero, por buenas razones sin duda, Frege no se resuelve a decir tal cosa.

---

[2] Frege hace referencia (SR, pág. 26) al pasaje de «Concepto y Objeto» discutido anteriormente en las págs. 160-61.

Aunque ello no le impide aplicar resueltamente la terminología de «parte/todo» al nivel de la referencia, y a utilizarla en apoyo de su tesis de que la referencia de un enunciado es su valor veritativo. Si una parte de un enunciado es reemplazada por otra con la misma referencia, entonces la referencia del todo debe permanecer constante. Y de hecho, el valor veritativo (y probablemente ninguna otra cosa salvo el valor de verdad) de un enunciado permanece constante en tales casos. (SR, [página 35]). Si en el ejemplo anterior se reemplaza «Nerón» por «El hijo de la joven Agripina», la proposición sigue siendo verdadera.

Lo mismo ocurre si la expresión a sustituir no es un nombre sino una proposición o cláusula dentro de otra proposición. Si la referencia de un enunciado es, como pretende la tesis, un valor veritativo, entonces el valor de verdad de una proposición que contenga a otra como parte debe permanecer constante cuando esa parte es reemplazada por otra proposición que tiene el mismo valor de verdad.

Tal es el caso, desde luego, cuando se reúnen varias proposiciones para formar una mayor mediante conjunciones tales como «y», «o», «si... entonces», entendiendo tales conjunciones en el sentido explicado en la *Conceptografía* (véanse las págs. 44-5). Así entendidas, tales conectivas son funciones veritativas; es decir, los valores veritativos de las proposiciones compuestas por estas conectivas dependen únicamente de los valores de verdad, y no del contenido, de las proposiciones componentes. De lo cual se sigue que si tomamos una proposición compuesta cualquiera y reemplazamos uno de sus componentes por otra proposición con diferente sentido pero con el mismo valor de verdad, el valor veritativo del todo no quedará alterado.

A título de ejemplo, Frege aduce la proposición

> Si ahora el sol se ha levantado ya, entonces el cielo está muy nublado,

y a propósito de ella comenta:

> Aquí puede decirse que se ha postulado una relación entre el valor veritativo del antecedente y del consecuente, o sea, la de que no se da el caso en que el antecedente se refiera a lo Verdadero y el consecuente a lo Falso. Según esto, nuestro enunciado es verdadero tanto si el sol todavía no se ha levantado ahora, esté el cielo muy nublado o no, como si el sol se ha levantado ya y el cielo está muy cubierto. Dado que en este caso sólo interesan los valores veritativos, puede sustituirse cada uno de los enunciados parciales por otro del mismo valor veritativo sin que cambie el valor de verdad del todo (SR, [pág. 45]).

El sentido de la proposición es equivalente a «O bien el sol no se ha levantado todavía, o el cielo está muy nublado». De acuerdo con lo dicho, «Si el sol se ha levantado ya, 5 es un número primo» resultará verdadera si esta proposición se dice antes de que el sol salga o en un día muy nublado. Frege está muy dispuesto a aceptar este resultado; reconoce que la proposición sonará muy extraña, «como si una melodía triste fuera entonada de una manera alegre» —pero esto no tiene nada que ver con el valor veritativo. Y sugiere que, al igual que las conjunciones «y» y «o», las partículas «aunque» y «pero» son igualmente susceptibles de tratamiento veritativo-funcional.

Debido en parte a la obra de Frege, los filósofos tienden ahora a considerar a las proposiciones unidas por conectivas veritativo-funcionales como coordinadas entre sí a un mismo nivel. Frege, sin embargo, escribía en un tiempo en el que era más natural considerar a uno de los componentes de una proposición como subordinado al otro en algún sentido. Y dice explícitamente que siempre que la referencia de una cláusula subordinada sea un valor veritativo, entonces esa cláusula puede ser reemplazada, sin que se altere el valor veritativo del todo, por una proposición que tenga el mismo valor de verdad.

Sin embargo, Frege reconoce que en el caso de mu-

chos tipos de cláusulas subordinadas no ocurre así, y la mayor parte de la sección final de «Sentido y Referencia» está dedicada a mostrar que en tales casos, contrariamente a las reglas generales, la referencia de la cláusula no es un valor veritativo. Para él, esos casos se agrupan en tres principales categorías: el entrecomillado directo, el entrecomillado indirecto y las descripciones definidas.

(1) Si una proposición aparece dentro de unas comillas, entonces la referencia de la proposición no es un valor de verdad, sino las palabras entrecomilladas, como en «Juan dijo 'El mundo acabará en el año 2000'». En este caso, aclara Frege, «Las palabras propias se refieren entonces en primer lugar a las palabras del otro, y tan sólo estas últimas tienen la referencia corriente» (SR, [pág. 28]).

(2) Si se utiliza una proposición para citar las palabras de otro, como en «Juan dijo que el mundo acabará en el año 2000», entonces la referencia de la proposición es, según Frege, lo que normalmente sería su sentido. Es ésta una referencia indirecta, en lugar de la habitual referencia directa; podemos decir que «La referencia indirecta de una palabra es, pues, su sentido usual» (SR, págs. 26, 35). ¿Significa esto que la distinción entre sentido y referencia desaparece en este caso? No; lo que Frege dice es que la cláusula tiene como sentido (indirecto, presumiblemente) «no un pensamiento, sino el sentido de las palabras 'el pensamiento de que...', el cual es sólo parte del pensamiento de la entera proposición compleja» (SR, [pág. 37]). Las expresiones de pensamientos, creencias e inferencias, esperanzas, temores y sentimientos de esta suerte, son similares en este respecto a las referencias indirectas: en todas ellas, la cláusula «que» hace referencia a sus sentidos y no a sus valores de verdad (SR, [págs. 38-9]).

Es fácil mostrar que dicha cláusula no tiene un sentido veritativo-funcional en tales casos. Las proposiciones «Copérnico creía que las órbitas de los planetas eran circulares» y «Copérnico creía que la Tierra gira alrededor del Sol» son ambas verdaderas, pese a que el contenido

de la primera cláusula «que» es falso y el de la segunda verdadero. Por otra parte, aunque la proposición «Urano gira alrededor del Sol» es tan verdadera como «Venus gira alrededor del Sol», la proposición «Copérnico creía que Venus gira alrededor del Sol» es verdadera, mientras que la proposición «Copérnico creía que Urano gira alrededor del Sol» es falsa, puesto que Urano no había sido descubierto en los días de Copérnico. En resumen:

> El enunciado principal, junto con el subordinado, tiene por sentido únicamente un solo pensamiento, y la verdad del todo no implica ni la verdad ni la falsedad del subordinado. En tales casos no está permitido sustituir, en el enunciado subordinado, una expresión por otra que tenga la misma referencia usual, sino solamente por una que tenga la misma referencia indirecta, es decir, el mismo sentido usual (SR, [pág. 37).

Esta excepción es aplicable no sólo a los enunciados completos, sino también a los nombres en ellos incluidos. En la proposición «Duncan creía que Macbeth era digno de confianza», no podemos sustituir «Macbeth» por «su asesino». La referencia de las dos expresiones es la misma, puesto que Macbeth era el asesino de Duncan, pero Duncan no tuvo jamás el pensamiento: «mi asesino es digno de confianza».

Frege asimila al caso del lenguaje indirecto y de la creencia una variedad de construcciones lingüísticas: informes indirectos de órdenes o de cuestiones, y enunciados finalistas que expresan un propósito. Considérense las dos proposiciones: «Napoleón creía que su flanco derecho iba a avanzar» y «Napoleón ordenó que su flanco derecho avanzara». Es claro que una estructura similar de argumento y función puede ser discernida tanto en la cláusula de la segunda proposición «que su flanco derecho avanzara» como en la de la primera, «que su flanco derecho iba a avanzar». Hay algo en común entre los sentidos de las dos cláusulas. La diferencia entre una y otra estriba en que si las dos proposiciones se reescri-

bieran en estilo directo, la primera contendría un entrecomillado en modo asertórico, y la segunda un entrecomillado en modo imperativo. Lo cual resume Frege diciendo que «una orden, un ruego, no son ciertamente pensamientos, pero, con todo, están al mismo nivel que el pensamiento». En las cláusulas subordinadas que expresan órdenes, las palabras tienen su referencia indirecta[3]. En estas proposiciones, al igual que en las que expresan creencias, la referencia no es un valor veritativo; es, dice Frege, una orden o un ruego. De lo cual concluimos que un mandato es para Frege el sentido de un enunciado imperativo.

Los enunciados de finalidad reciben un tratamiento muy breve. «Evidentemente», dice Frege, «la finalidad es un pensamiento; por eso: referencia indirecta de las palabras, subjuntivo» (SR, pág. 34). Pero esto resulta cuestionable: los propósitos de Napoleón eran seguramente apoderarse del mundo, y no el pensamiento que él tenía de apoderarse del mundo. «Napoleón tomó las medidas necesarias para que su flanco derecho avanzara» parece estar más cerca de «Napoleón ordenó que su flanco derecho avanzara» que de «Napoleón creía que su flanco derecho iba a avanzar», y así, incluso aceptando el argumento de que la referencia en este caso es indirecta, parece que Frege debiera haber dicho que la finalidad no es similar a un pensamiento, sino algo en cierta manera análogo a una orden o a un ruego.

Dada la explicación fregeana de la referencia, es claro que en los casos donde la referencia de una cláusula no es un valor veritativo sino un pensamiento, una orden o un propósito, esa cláusula puede ser considerada como un nombre propio del respectivo pensamiento, orden o propósito.

(3) Frege pasa a la consideración de un grupo muy diferente de casos, que podrían ser agrupados ahora (si-

---

[3] No me resulta claro cuál sería para Frege la referencia directa de una oración imperativa.

guiendo a Bertrand Russell) bajo el nombre de proposiciones que contienen descripciones definidas. Considérese el siguiente enunciado, adaptado de uno de Frege:

El hombre que descubrió el oxígeno fue guillotinado.

Expresiones como «el hombre que descubrió el oxígeno» fueron llamadas por Russell descripciones definidas, y las hizo objeto de un minucioso análisis en simbolismo formal que venía a ser más o menos equivalente al análisis en lenguaje común de la proposición «un y solamente un hombre descubrió el oxígeno, y ese hombre fue guillotinado».

El tratamiento fregeano es diferente. Al preguntarse cómo hemos de interpretar la proposición relativa

«el que descubrió el oxígeno»,

Frege dice que una cláusula de este tipo no tiene un pensamiento como sentido ni un valor veritativo como referencia. No es un pensamiento completo; el sujeto gramatical «el que» no tiene sentido de por sí, y su única misión es establecer una relación con la cláusula principal. La referencia de la descripción definida no es un valor veritativo, sino un objeto, a saber, el químico Lavoisier.

Cabría pensar que el sentido de la proposición original incluye un pensamiento como parte suya, por ejemplo, el pensamiento de que hubo alguien que fue el primero en descubrir el oxígeno. En cualquier caso, nadie que tomara la proposición por verdadera podría negar la existencia de una tal persona. Si «el hombre que descubrió el oxígeno» no tuviera referencia, la proposición no podría ser verdadera.

Frege acepta esta objeción, pero dice que esa proposición no establece, sino sólo presupone, que hubo alguien que fue el primero en descubrir el oxígeno. La proposición presupone ciertamente que hubo tal perso-

na, pero eso es bastante diferente de dar por sentado que contiene, como parte del pensamiento que expresa, el pensamiento de que hubo tal persona. «Lavoisier descubrió el oxígeno» presupone igualmente que el nombre «Lavoisier» tiene una referencia; pero eso no es parte del pensamiento que la proposición expresa. Si lo fuera, la negación de «Lavoisier fue guillotinado» no sería «Lavoisier no fue guillotinado», sino

> O Lavoisier no fue guillotinado, o «Lavoisier» no tiene referencia.

Que «Lavoisier» tiene referencia está presupuesto igualmente tanto por «Lavoisier fue guillotinado» como por «Lavoisier no fue guillotinado». Y esto muestra la diferencia entre el caso en donde una proposición presupone la verdad de otra, y el caso en donde una proposición contiene a otra como parte de su sentido.

Así «el hombre que descubrió el oxígeno fue guillotinado» no establece, sino que sólo presupone, que hubo un y solamente un hombre que descubrió el oxígeno. La interpretación de proposiciones de este tipo, tratada aquí a la ligera por Frege, fue explorada posteriormente de manera fértil por Russell y sus seguidores. Mas en la actualidad hay filósofos que piensan que el enfoque fregeano era más apropiado.

Frege creía que la posibilidad de una descripción definida carente de referencia tenía que ser evitada no por estipulaciones particulares en proposiciones individuales, sino más bien por reglas generales sobre la construcción de lenguajes científicos.

> De un lenguaje lógicamente perfecto (ideografía) hay que exigir que cada expresión, que se haya formado como nombre propio a partir de signos ya introducidos de manera gramaticalmente correcta, designe realmente también un objeto, y que no se introduzca ningún signo como nombre propio sin que antes no se le haya asegurado una referencia (SR, [pág. 40]).

Lo que Frege tiene aquí en mente está ilustrado por el ejemplo dado en «Función y Concepto», cuando dice que hemos de poner cuidado en no realizar jamás cálculos con signos vacíos en la creencia de que estamos operando con objetos.

> Es por tanto necesario producir especificaciones para saber, por ejemplo, qué significa «⊙ + 1» si ⊙ ha de significar el Sol. Es realmente indiferente el modo en que se establezcan estas especificaciones; pero es esencial que se hagan (FC, [págs. 19-20]).

CAPÍTULO VIII

Grundgesetze der Arithmetik, I

Grundgesetze der Arithmetik (Los principios de la aritmética), proyectada por Frege como la obra mayor de su vida, había de establecer de manera rigurosa y completa la derivación sistemática de la aritmética a partir de la lógica. El primer volumen había sido publicado en 1893 con grandes expectativas por su parte, pero por el tiempo en que apareció el segundo volumen en 1903 era ya evidente que el programa no podía ser continuado según las líneas que anteriormente se había trazado Frege. En este capítulo voy a describir el modo en que el primer volumen desarrolla (en una notación basada en la *Conceptografía)* las ideas que de manera menos formal habían sido presentadas en *Los fundamentos de la aritmética*.

El libro comienza con una larga introducción en la que Frege explica que las pruebas a presentar, escritas enteramente en símbolos, han sido dispuestas en secuencias de fórmulas, cada una de las cuales es una proposición completa. «Esta completud, que no permite la adopción tácita de presuposición alguna en el pensamiento, me parece indispensable para el rigor de la marcha de la prueba.» El avance desde una proposición a la siguiente sólo puede realizarse según reglas explícitamente especificadas; todos los métodos de inferencia tienen que ser establecidos de antemano. Y, por supuesto, todas las

definiciones que se aporten deben abandonar la pretensión de ser creativas: no serán sino abreviaturas de términos complejos, introducidas para simplificar la escritura de las pruebas.

Frege describe su método como un desarrollo del método de Euclides. No podemos pedir que todo sea probado, pues eso es imposible; pero podemos exigir que todas las proposiciones utilizadas sin prueba sean expresamente declaradas como tales, y reducir al mínimo el número de esas proposiciones primitivas. Estos axiomas o proposiciones sin demostrar, a los que Frege llama «principios», son los que dan título al libro.

Algunos matemáticos sostienen que la aritmética es una lógica más profundamente desarrollada. Que esta pretensión no se limita a ser una vaga palabrería, sólo puede quedar demostrado cuando las pruebas de las proposiciones aritméticas hayan sido elaboradas en términos de simples pasos lógicos que no dejen el menor resquicio al recurso tácito a la intuición. De hacerlo así —y ésta era la intención de Frege—, cualquier error en el sistema puede ser claramente localizado, ya se encuentre en los axiomas, en las definiciones, o en las reglas de aplicación de éstas. Con admirable poder de adivinación, Frege anuncia que el único punto susceptible de plantear alguna dificultad estaría en conexión con el quinto de sus axiomas, un axioma que introduce la noción de curso de valores y que, en «Función y Concepto», había sido añadido al sistema de la *Conceptografía*. Cuando más adelante discutamos este axioma podremos comprobar que las reservas del autor respecto a este punto estaban justificadas.

Abandonando momentáneamente la marcha de su exposición en la introducción, Frege se aplica ahora a justificar ante el lector la extraordinaria longitud de las pruebas que va a ofrecer de verdades obvias de la aritmética. La longitud de una prueba, dice, no se mide con un metro: las pruebas pueden ser acortadas saltándose pasos. El lector ordinario de matemáticas se dará por satisfecho,

y no sin razón, con que cada uno de los pasos sea evidentemente correcto; pero si lo que uno va buscando es comprender con claridad qué significa exactamente ser evidente para una verdad matemática, entonces todos los pasos intermedios tienen que ser exhibidos y examinados.

Frege insiste en que la concepción del número que ahora presenta en 1893 es la misma que la que tenía en los *Fundamentos* de 1884. El principio fundamental sigue siendo que un enunciado acerca de un número expresa una aserción sobre un concepto. Las proposiciones sobre números se ocupan de conjuntos de agregados sólo en la medida en que tales agregados son clases determinadas por un concepto, esto es, por las propiedades que un objeto ha de tener para pertenecer a la clase.

El proyecto que ahora presenta estaba ya concebido en la época de aparición de la *Conceptografía* en 1879, y la notación que aquí se utiliza es básicamente la misma. Frege llama la atención, sin embargo, sobre una serie de expansiones del sistema. (1) El símbolo «≡» utilizado en la *Conceptografía* para la identidad de contenido, es reemplazado por el signo de identidad ordinario. (2) La notación para el curso de valores que aquí se introduce se atiene a la utilizada en el establecimiento de esta noción en «Función y Concepto» (FC, págs. 220-1). (3) Para cumplir el papel que en el lenguaje ordinario realiza el artículo determinado se introduce un símbolo totalmente nuevo.

En conexión con el curso de valores dice Frege:

> Los cursos de valores tienen además una enorme importancia en lo que concierne a los principios; pues yo defino al número como la extensión de un concepto, y las extensiones de conceptos son, como he determinado, cursos de valores. De ellos, por tanto, en modo alguno se podría prescindir (GA, págs. IX-X).

En adicion a estas innovaciones de símbolos, Frege llama la atención sobre los dos cambios introducidos en

la interpretación filosófica del simbolismo. En primer lugar, la barra horizontal es tomada ahora de un modo diferente, puesto que la noción de «contenido» ha sido ya dividida en sentido y referencia. En segundo lugar, y como consecuencia de ello, los dos valores veritativos, lo Verdadero y lo Falso, han sido identificados como la referencia de las proposiciones.

Frege se dirige en este libro tanto a matemáticos como a filósofos, aunque sin gran esperanza de ser totalmente entendido. Muchos matemáticos, se lamenta Frege, al encontrarse con expresiones como «concepto» y «relación» se apartan de lo que a sus ojos es metafísica, y muchos filósofos, al toparse con los símbolos que aparecen en las páginas, saltan hasta el siguiente pasaje no matemático. Por otra parte, pocos matemáticos tienen un serio interés en los fundamentos de la matemática; y los que lo tienen están demasiado inclinados a adoptar un punto de vista formalista y mantener que la matemática es simplemente un juego como el ajedrez.

En este contexto vuelve a repetir Frege su conocido ataque contra la noción formalista de definición creativa:

> Por pura definición, uno no puede conjurar mágicamente en una cosa una propiedad que de hecho no posee, salvo la de llamarla por el nombre que se le haya otorgado. Que una figura oval dibujada con tinta en un papel pueda adquirir mediante una definición la propiedad de dar uno cuando se le suma uno, sólo es para mí una superstición científica. De la misma manera cabría hacer, por mera definición, un alumno aplicado de uno que fuera perezoso (GA, págs. XIII-XIV).

Frege afirma que al igual que sus contemporáneos matemáticos son todos formalistas, los lógicos de su tiempo son todos psicologistas. Sus pesados y extensos libros de texto están repletos de insana grasa psicológica que oculta las más delicadas formas (GA, pág. XXV). En lugar de las cosas mismas, los lógicos consideran sólo imágenes, simulacros subjetivos. Confunden las leyes

normativas de la lógica con las leyes descriptivas de la psicología. Si las leyes del pensamiento fueran psicológicas, dirían sin duda cómo piensa el hombre promedio. Y si uno quisiera ser una persona promedia, no tendría más que recurrir a esos principios para conformarse a la mayoría. Las leyes de la lógica serían como los principios que le enseñan a uno a hablar de acuerdo con la gramática o a vestirse según la moda.

> Pero de la misma manera que lo que hoy es moderno, dejará de serlo pasado algún tiempo y ahora no lo es entre los chinos, de la misma manera sólo con restricciones cabe otorgar vigencia a las leyes psicológicas del pensamiento (GA, pág. XV).

Los lógicos psicologistas confunden la verdad de una cosa con el conocimiento de que esa cosa es verdadera. Pero los dos casos son muy diferentes; no hay contradicción alguna en que una cosa sea verdadera mientras que todo el mundo la toma por falsa.

> Si es verdad que yo estoy escribiendo esto en mi despacho el 13 de julio de 1893, mientras el viento silba en el exterior, entonces este hecho seguiría siendo verdadero incluso aunque todos los hombres lo tomaran luego por falso (GA, pág. XVI).

Las leyes de la lógica no son leyes psicológicas: son las eternas vallas fronterizas que nuestro pensamiento puede sobrepasar pero nunca desplazar. La ley de identidad, por ejemplo, tiene que ser establecida como

Todo objeto es idéntico a sí mismo

y no como

Es imposible que las personas del año 1893 reconozcan a un objeto como diferente de sí mismo.

Según Frege, el psicologismo conduce al idealismo y eventualmente al solipsismo.

> Si cada hombre designara con el nombre «luna» algo diferente, digamos una de sus representaciones, a la manera, tal vez, como exterioriza su propio dolor con la exclamación «¡ay!», entonces sin duda el enfoque psicologista estaría ciertamente justificado; pero una disputa sobre las propiedades de la luna estaría desprovista de objeto: el uno podría afirmar perfectamente de su luna lo contrario de lo que el otro diría con el mismo derecho de la suya... No habría ninguna lógica a la que apelar como árbitro en el conflicto de las opiniones (GA, pág. XIX).

Si queremos abandonar esta subjetividad habremos de aceptar que nuestro conocimiento no crea lo que conoce, sino que capta lo que ya está ahí. Cuando capto o empuño un lápiz se producen en mi cuerpo muchos cambios fisiológicos, pero esos cambios no son el lápiz ni crean el lápiz; de manera similar, cuando capto algo con mi mente, esta captación puede provocar muchos fenómenos psicológicos, pero lo que es captado no es idéntico a esos sucesos de mi vida mental ni creado por ellos.

La sección que abre los *Grundgesetze*, o sección 0 del libro, sólo contiene un par de nociones que añadir a lo ya dicho. En primer lugar, Frege procede a clarificar la naturaleza de su objeción a la noción de «conjunto». Es un error considerar que un conjunto está definido por enumeración de sus elementos. Frege se muestra dispuesto a aceptar la noción de conjunto a condición de que sea equivalente a lo que Boole llamó «clase» y Dedekind «sistema». Según Dedekind,

> Un tal sistema *S* [...] está completamente determinado, si para cada objeto está determinado si es un elemento de *S* o no lo es. De aquí que un sistema *S* es el mismo que un sistema *T* (en símbolos, *S* = *T*) si todo elemento

de *S* es también un elemento de *T* y todo elemento de *T* es también un elemento de *S* (GA, págs. 1-2).

Frege no tiene inconveniente en admitir que ésta es una noción aceptable de conjunto o clase. Determinamos una clase especificando un concepto (tal vez anotando las características de sus componentes) y luego definimos la clase como la clase de objetos que caen bajo ese concepto. Con esta definición no hay dificultad alguna con la noción de clase vacía: es el conjunto definido por un concepto bajo el cual no cae ningún objeto. En cambio, la clase vacía es un absurdo si los conjuntos vienen determinados por la enumeración de sus elementos.

En segundo lugar, Frege subraya explícitamente la necesidad de atenerse a un uso estricto, e incluso pedante, de las comillas. «Su utilización», nos dice, «me permite distinguir entre los casos en que estoy hablando del signo mismo y aquellos otros en los que hablo de lo que ese signo representa.» En sus anteriores escritos, Frege no había sido siempre tan puntilloso en esta cuestión. Incluso ahora no se detiene en explicitar una nueva convención que adopta (y que ha empleado a partir de «Función y Concepto») sobre la utilización de cursivas para hablar de funciones no lingüísticas. Las cursivas son también utilizadas en los *Grundgesetze* y en otros escritos para acentuar algo o para introducir términos recién definidos. Sólo en raros casos este uso puede producir confusión, pero esta situación ilustra el largo camino que le quedaba a Frege por recorrer antes de lograr su ideal de rigurosa exclusión de toda ambigüedad entre significante y significado.

La noción de función es introducida en la sección 1 de los *Grundgesetze*. En general se la presenta ahora del mismo modo que en «Función y Concepto». Aquí como allí, Frege rechaza la idea de que una función es un cierto tipo de expresión, y continúa rechazando, como una segunda salida falsa, la idea de que una función sea

aquello que un cierto tipo de expresión representa. La esencia de una función (tal como $(2 - x) + x^2$) sólo se revela cuando sustituimos la «*x*» por numerales. La esencia de la función se muestra a sí misma en la conexión establecida entre los números cuyos signos ponemos en lugar de la «*x*» y los números que son las referencias de las expresiones que formamos mediante estas sustituciones[1]. En palabras de Frege:

> La expresión de una *función* es *por necesidad de compleción, insaturada.* La letra «*x*» sirve sólo para reservar abierto un lugar para el numeral que va a completar la expresión, y de este modo hace reconocible el particular tipo de necesidad de compleción que constituye la naturaleza específica de la función acabada de simbolizar (GA, págs. 5-6).

Frege introduce las nociones de *argumento* y *valor* como en sus anteriores obras, y luego continúa:

> Obtenemos el nombre del valor de una función para un argumento cuando rellenamos los lugares en el nombre de la función con el nombre del argumento.

Así, por ejemplo, «$(2 - 1) + 1^2$» es el nombre del número 2, compuesto del numeral «1» y del nombre de la función acabada de mencionar.

En el primer pasaje es claro que una expresión funcional, al igual que la función misma, es algo incompleto e insaturado. Esto se ajusta a la descripción de funciones lingüísticas dada en la *Conceptografía*, aunque ahora Frege se desvía un tanto de la caracterización de las funciones dada en su primera obra, ya que entonces

[1] Tal conexión, dice Frege, está «representada intuitivamente en el trazado de la curva cuya ecuación en coordenadas rectangulares es "$y = (2 + 3x^2)x$"». Anteriormente, en «Función y Concepto», no fue la función misma, sino su curso de valores lo que fue comparado con la curva.

no podía reflejar una clara distinción entre las funciones lingüísticas y las funciones que éstas expresan. Resulta sorprendente que, tras haber reconocido que un símbolo de función tiene que participar por sí mismo de la incompletud de la función, Frege continúe hablando en el segundo pasaje citado de «nombres de función», puesto que, según la teoría que hasta ahora ha venido proponiendo, un nombre es un signo completo y saturado. De aquí en adelante ampliará el uso de «nombre» para incluir en él a las funciones lingüísticas, y utilizará «nombre propio» donde antes habia empleado «nombre». Por ejemplo, poco más adelante dice

> Los nombres de objetos, o nombres propios, no reservan lugares para argumentos; son saturados, como los objetos mismos (GA, pág. 7).

Mientras hasta aquí ha hablado de «nombres» y de «predicados», ahora prefiere hablar de «nombres propios» y de «nombres de función». La anterior terminología era seguramente preferible[2].

La expansión fregeana de la noción matemática de función, y la extensión de posibles argumentos a todos los objetos, incluyendo los valores veritativos, es llevada a cabo en las secciones dos y cuatro de los *Grundgesetze*. Estos pasajes se limitan a abreviar, sin añadirles nada, los correspondientes pasajes en «Función y Concepto» (véanse págs. 142-143 más arriba). Sin embargo, en la sección tres de los *Grundgesetze*, hay una notable diferencia entre la manera de introducir aquí los cursos de valores y el modo en que fueron presentados en «Función y Concepto».

Ahora como entonces, Frege comienza diciendo que

---

[2] Lo que Frege llama «nombre de función» no es una expresión real que ocurra dentro de su simbolismo, sino un patrón discernible cuando se forma el nombre de un valor a partir del nombre de un argumento.

dos funciones tienen el mismo curso de valores si y sólo si tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento. Pero mientras que en «Función y Concepto» procede inmediatamente a introducir un símbolo especial para los cursos de valores, en *Grundgesetze* dice que, dadas las apropiadas definiciones, la función

$$(\xi^2 = 4) = (3\xi^2 = 12)$$

tiene siempre como valor lo Verdadero.

Puesto que, tanto aquí como en «Función y Concepto», una función cuyo valor sea siempre un valor veritativo es un concepto, podemos llamar extensión de ese concepto al curso de valor veritativo de una función de este tipo. De aquí que pueda decir Frege que la fórmula anterior es equivalente a «el concepto *raíz cuadrada de 4* tiene la misma extensión que el concepto *algo cuyo cuadrado triplicado es 12*» (GA, págs. 7-8).

Frege introduce en este punto funciones de dos argumentos. Estas funciones tienen para él doble necesidad de compleción. Cuando se completa uno de los lugares de sus argumentos nos queda una función de un argumento. Por ejemplo, $\xi(\xi + 2\zeta)$ es una función de los dos argumentos ξ y ζ; al sustituir «ζ» por «1» saturamos parcialmente esa función. Y en su lugar tenemos la función $\xi(\xi + 2)$, que es una función de un argumento. Si saturamos a su vez esta función sustituyendo «ξ» por «3», obtenemos el valor 15. «Sólo mediante una segunda compleción», dice Frege, «llegamos a un objeto, y éste es llamado entonces el valor de la función para los dos argumentos» (GA, pág. 8).

Algunas funciones de dos argumentos tendrán, para cualquier par de argumentos, un valor veritativo como valor. Tal es el caso, dadas las apropiadas definiciones, de las funciones $\xi = \zeta$ y ξ *es mayor que* ζ. Así como Frege definió al concepto como una función de un argumento cuyo valor es siempre un valor veritativo, del mismo modo define ahora a la relación como una fun-

ción de dos argumentos cuyo valor es siempre un valor de verdad. Si $\Phi(A, B)$ es válida, entonces *A* está en la relación $\Phi(\xi, \zeta)$ con *B*.

En la sección 5 introduce Frege la barra del juicio, distinguiendo entre verdad y aserción a su manera usual: la expresión «2 + 3 = 5» meramente denota lo Verdadero; sólo cuando se le añade el signo especial de aserción es cuando esa expresión *dice que* es verdadera. La línea horizontal que en la *Conceptografía* se denominaba «barra del contenido», es aquí llamada «la horizontal» sin más, puesto que, desde que la distinción entre sentido y referencia fue introducida, la noción de *contenido* comporta a juicio de Frege una confusión entre pensamiento y valor veritativo.

La barra horizontal es de por sí un signo de función. De este modo, $-A$ es lo Verdadero si *A* es lo Verdadero; en caso contrario es lo *Falso*. Esta definición significa que $-A$ es lo Falso no solamente cuando *A* es lo Falso, sino también cuando *A* no es en absoluto un valor veritativo. Así, el valor de -5 es lo Falso. Esta estipulación es una instancia del cuidado que pone Frege en introducir en sus definiciones el requisito que impida que nombres sin referencia puedan tener cabida en un lenguaje científico como el de su conceptografía. Además, puesto que $-\xi$ es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo, $-\xi$ es, por la definición de Frege, un concepto. Un concepto bajo el cual solamente cae lo Verdadero.

A continuación Frege introduce el signo de negación «—┬—», estipulando que el valor de —┬ξ va ser lo Falso para todo argumento en el que el valor de —ξ sea lo Verdadero, y lo Verdadero para todos los otros argumentos[3]. Así «—┬(5 = 4)» es equivalente a la proposición del len-

3 En mi explicación del simbolismo de la *Conceptografía* he utilizado una notación moderna para la negación. Aquí me he valido del propio signo de Frege para resaltar la relación entre la negación y la barra del contenido y la manera en que la negación puede ser aplicada en el nuevo sistema a elementos que no son proposiciones. En la notación moderna, «¬5» sería simplemente una fórmula mal formada.

guaje ordinario «5 no es 4». Como cabría esperar, de la definición de Frege se sigue que la negación de una proposición es una función veritativa de esa proposición, es decir, que el valor de verdad de la negación depende del valor de verdad de lo que es negado. Pero esto no es todo lo que se sigue de la definición fregeana. Si lo que es negado no es una proposición en absoluto, entonces la negación resulta ser verdadera bajo su estipulación. Así pues, según la definición fregeana, «—┬—5» nombra lo Verdadero al igual que lo hace «—┬—(5 = 4)». Frege afirma que la negación es un concepto bajo el cual cae cualquier objeto salvo lo Verdadero.

El simbolismo para la generalidad y la noción de alcance son introducidos en los *Grundgesetze* esencialmente del mismo modo que en la *Conceptografía*. Las diferencias en la exposición obedecen exclusivamente a dos causas: la primera a la nueva estrategia de Frege de tratar a las proposiciones como nombres de valores veritativos, y la segunda a su creciente y escrupuloso cuidado en añadir estipulaciones que aseguren que ningún signo, o combinación bien formada de símbolos, carezca de referencia.

Las secciones 9 y 10 son las que marcan un desarrollo significativo de los *Grundgesetze* respecto a la *Conceptografía*, es decir, en la exposición del simbolismo para los cursos de valores, introducido por vez primera en «Función y Concepto». Si dos funciones, Φ y Ψ, tienen el mismo valor para cualquier argumento, de suerte que $(x)\ \Phi x = \Psi x$, entonces, como ya ha sido estipulado, las dos funciones tienen el mismo curso de valores. Podemos transformar una identidad generalizada en una identidad de curso de valores.

> Esta posibilidad tiene que ser considerada como una ley lógica; una ley que es invariablemente empleada, si bien de manera tácita, siempre que se entabla una discusión sobre las extensiones de los conceptos (GA, página 14).

Frege recuerda que en los *Fundamentos de la aritmética* había definido al número como la extensión de un concepto. Ahora explica por qué es esencial dar el paso desde las identidades generalizadas a la identidad de cursos de valores. Puesto que un curso de valores es un objeto, podemos establecer un simple signo para el curso de valor e introducir así un nombre propio para el número. Sin embargo, en

$$(x)\ (\Phi(x) = \Psi(x))$$

no es posible utilizar un único símbolo para «$\Phi(x)$», puesto que la letra «x» tiene que figurar siempre en la expresión que sustituya a «$\Phi(x)$».

Al construir signos para cursos de valores, Frege introduce, como ya hiciera en «Función y Concepto», el símbolo formado por una letra griega coronada por el signo ' (el espíritu suave). Así, $\acute{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 = 4)$ es el curso de valores de la función $\xi^2 = 4$, o la extensión del concepto *raíz cuadrada de 4*, y en general «$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$» denota el curso de valores de la función $\Phi(\xi)$. «La introducción de una notación para los cursos de valores», dice Frege, «me parece ser una de las más importantes adiciones hechas a la escritura conceptual desde mi primera publicación sobre la materia» (GA, págs. 15-16).

Cuando esta notación fue introducida por vez primera en «Función y Concepto», los cursos de valores eran explicados como algo comparable a las curvas en un gráfico. Lo cual inducía a entenderlos como un conjunto de pares ordenados de argumentos y valores. Pero ahora, en la aplicación del simbolismo en los *Grundgesetze*, Frege parece mucho más inclinado a considerar los cursos de valores de un concepto como la clase de objetos que caen bajo ese concepto.

La concepción que ahora tiene Frege de los cursos de valores es aclarada en la nota 1 de la página 18 de los *Grundgesetze*. En esta nota sugiere Frege que todo objeto pueda ser considerado como un curso de valores, o sea, como la extensión de un concepto bajo el cual ese

y solamente ese objeto cae. Un concepto bajo el cual un objeto *A* y solamente *A* cae es el concepto $\xi = A$. Así podríamos sentirnos tentados, dice Frege, a introducir la estipulación de que $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = A)$ sea lo mismo que *A*. Pero acto seguido rechaza esta sugerencia, aunque no sobre la base de que un objeto como, digamos, Julio César sea muy diferente de un conjunto de pares ordenados del tipo {Julio César, Lo Verdadero; Augusto, Lo Falso; etc.}[4].

La noción de curso de valores encuentra su aplicación en la segunda innovación presentada por vez primera en los *Grundgesetze:* la introducción de una función cuyo papel en la escritura conceptual va a ser similar al del artículo determinado en expresiones tales como «La raíz cuadrada negativa de cuatro».

Supóngase que tomamos el ejemplo utilizado en el capítulo anterior (pág. 180),

---

[4] La explicación más clara dada por Frege de cómo entendía él en aquella época la relación entre los predicados y sus sentidos y referencias, y entre los conceptos y sus extensiones, aparece no en los *Grundgesetze,* sino en una carta dirigida a Husserl en 1891. En ella expone el siguiente esquema:

Proposición	Nombre propio	Palabra-concepto	
Sentido de la proposición	Sentido del nombre propio	Sentido de la palabra	
Referencia de la proposición	Referencia del nombre propio	Referencia de la palabra-concepto →	Objeto que cae bajo el concepto
(Valor veritativo)	(Objeto)	(Concepto)	

Y continúa diciendo: «en el caso de la palabra-concepto hay un paso más hasta llegar al objeto del que lo hay en el caso de un nombre propio; y el objeto puede faltar —es decir, el concepto puede ser vacío— sin que el concepto deje de ser por ello científicamente útil. El último paso desde el concepto hasta el objeto ha sido escrito en una columna adyacente para indicar que uno y otro están a un mismo nivel, que los conceptos y los objetos tienen la misma objetividad (véase FA, pág. 150).

El hombre que descubrió el oxígeno fue guillotinado.

Hemos visto que Frege admitía que esta proposición sólo podía ser verdadera a condición de que fuera uno y solamente uno el hombre que descubrió el oxígeno, pero negaba que este hecho fuera afirmado por todo el que afirmase la mentada proposición; ese hecho era, mas bien, presupuesto. Pero si un y solamente un hombre descubrió el oxígeno, entonces un y solamente un objeto cae bajo el concepto ξ *descubrió el oxígeno*. Sabemos efectivamente que ese objeto es Lavoisier. De aquí que el valor de ξ *descubrió el oxígeno* para cualquier argumento sea el mismo que el valor de ξ = *Lavoisier* para cualquier argumento. Por tanto, según la definición de Frege, los cursos de valores de las dos funciones son los mismos:

ἐ(ε descubrió el oxígeno) = ἀ(α = Lavoisier).

Y en general, si un y solamente un objeto *A* cae bajo un concepto Φ, el curso de valores ἐΦ(ε) es el mismo que el curso de valores ἀ(α = *A*).

En esta identidad de cursos se apoya Frege para introducir una función /ξ, que corresponda al artículo determinado en las descripciones definidas. La definición de esta función exige dos estipulaciones, de las cuales la primera es como sigue. Siempre que el argumento ξ sea un curso de valores idéntico a un curso de valores ἀ(α = *A*) que corresponda al objeto *A*, el valor de la función es el propio *A*. De esto se sigue que el valor de /ἀ(α = *Lavoisier)* es Lavoisier, como también lo es de /ἐ(ε *descubrió el oxígeno)*, puesto que estos dos cursos de valores son idénticos. Por tanto, podemos usar la expresión «/ἐ(ε descubrió el oxígeno) como equivalente a «el descubridor del oxígeno», y, en general, sustituir la expresión «el Φ-or» por «/ἐΦ(ε)».

Pero la estipulación acabada de introducir acerca del valor de /ξ es insuficiente para definirlo, si se respeta la exigencia fregeana de que el valor de toda función esté definido para todo argumento posible. Pues supóngase que no hay únicamente un objeto que caiga bajo el concepto Φ, por ejemplo, que «el Φ-or» es «el descubridor del cálculo diferencial». Puesto que Newton y Leibniz realizaron este descubrimiento independientemente, el curso de valores ἐ(ε descubrió el cálculo) no es idéntico ni a ἀ(α = Newton), ni a ἀ(α = Leibniz). No hay ciertamente ningún curso de valores de la forma ἀ(α = *A*) que sea idéntico al curso de valores del concepto ξ *descubrió el cálculo.* Para tales casos, Frege añade un segundo miembro a su definición de la función /ξ. Cuando quiera que el argumento de la función no satisfaga la condición establecida por el primer miembro, el valor de la función será entonces el argumento mismo. Así, por ejemplo, el valor de /ἐ($\varepsilon^2 = 1$) es justamente ἐ($\varepsilon^2 = 1$), porque hay más de una raíz cuadrada de 1 (GA, pág. 19).

Frege dice que esta estipulación garantiza que «/ἐΦ(ε)» tenga siempre una referencia, tanto en el caso de que la función Φ*(x)* sea o no sea un concepto como en el de que sea un concepto bajo el cual no cae ningún objeto, o más de uno, o exactamente uno. Presumiblemente, si el argumento de /ξ no es en absoluto un curso de valores, sino algún otro tipo de objeto, su sentido queda igualmente asegurado por el segundo miembro de la definición: así el valor de */Julio César* no será sino el mismísimo Julio César.

En la sección 12 de los *Grundgesetze* introduce Frege las definiciones de las conectivas veritativo-funcionales. Empieza por definir el símbolo correspondiente al condicional veritativo-funcional «Si *p* entonces *q*» (entendido en el sentido de que o bien *p* es falso o *q* es verdadero), luego define el signo correspondiente a «y» (con «*p* y *q*» definida en efecto como «No es el caso que si *p* entonces no *q*»), y finalmente la pareja «ni-ni» y la «o»

inclusiva[5]. Estos símbolos son introducidos esencialmente del mismo en que de manera más bien confusa fueron explicados en la *Conceptografía* y más claramente en «Función y Concepto». Pero conviene precisar que de acuerdo con la nueva pasión de Frege por tratar casi todos los símbolos como nombres, el mismo símbolo «→» tiene el papel de un nombre, el nombre de la función de dos argumentos $\xi \rightarrow \zeta$.

Frege observa que la conectiva proposicional «y» parece ser en su simbolismo menos simple que el signo del condicional veritativo-funcional, que carece de un correlato verbal, pues la expresión «si ... entonces» es apropiada sólo en ciertos contextos. Según Frege, esa relación nos parece más natural en lenguaje ordinario porque estamos acostumbrados a ella. Desde un punto de vista lógico es difícil decir cuál es más simple; el condicional veritativo-funcional puede ser definido en términos de conjunción y negación, pero igualmente puede ser definida la conjunción en términos de negación y del condicional veritativo-funcional. La razón que Frege aduce para tomar al condicional veritativo-funcional como primitivo es la facilidad de su uso en la presentación de inferencias deductivas.

De acuerdo con esto, Frege procede ahora a establecer sus métodos de inferencia. El primero de ellos es su versión del *modus ponens*: De A y $A \rightarrow B$ infiere B. Éste, dice Frege, es el único método de inferencia usado originalmente en la *Conceptografía* y uno puede arreglárselas con él solamente; pero para acortar las largas cadenas de inferencias es necesario introducir reglas adicionales. Las particulares reglas que Frege introduce ahora tienen sólo un interés histórico, y no es necesario detenerse aquí en especificarlas.

---

[5] Para los nombres de objetos, Frege no utiliza las variables proposicionales «*p*», «*q*», «*r*», sino letras griegas mayúsculas. Lo cual está de acuerdo con su tesis de que las proposiciones son nombres de valores veritativos.

La sección de los *Grundgesetze* que vuelve a plantear cuestiones de perdurable interés filosófico es la sección 21, donde Frege introduce su distinción entre funciones de primer y de segundo nivel. Vimos en la *Conceptografía* que «$\neg(x)\neg(x^2 = 4)$» y «$\neg(x)\neg(x$ es mayor que 0)» pueden ser consideradas indistintamente como instancias de una expresión más general «$\neg(x)\neg\Phi(x)$», obtenida al reemplazar la expresión funcional «Φ(...)» por las expresiones funcionales «$...^2 = 4$» y «... es mayor que 0». Supóngase ahora que tenemos una función cuyo signo de argumento en «X(ξ)» es reemplazado por «Φ(ξ)». Frege dice:

> Hablamos usualmente aquí de una función de función, aunque sin rigor; pues si recordamos que las funciones son fundamentalmente distintas de los objetos, y que el valor de una función para un argumento ha de ser distinguido de la función misma, entonces nos percataremos de que un nombre de función no puede ocupar nunca el lugar de un nombre propio, porque el nombre de función arrastra consigo lugares vacíos que responden a la insaturación de la función. Si decimos «la función Φ(ξ)», entonces no debemos olvidar jamás que «ξ» pertenece al nombre de función sólo en el sentido de que es el que hace reconocible esa insaturación. Así pues, una función no puede volver a aparecer como argumento de la función *X(ξ)*, aunque sí en cambio puede hacerlo el valor de una función, como por ejemplo Φ(2), en cuyo caso el valor es entonces *X*(Φ2) (GA, págs. 36-37).

El nombre de función no aparece realmente en este caso como argumento de *X*(ξ), porque ese nombre ocupa sólo una parte del lugar para el argumento.

Sin embargo, en «$\neg(x)\neg\Phi(x)$» tenemos una expresión en la cual podemos reemplazar la expresión funcional «Φ(ξ)» por expresiones de funciones de un argumento, aunque no por nombres de objetos, y tampoco por nombres de funciones de más de un argumento. Así «$\neg(x)\neg(x^2 = 4)$», y «$\neg(x)\neg(x$ es mayor que 0)» pueden

ser tomadas ambas como valores de la misma función para diferentes argumentos, pero cuando los argumentos son a su vez funciones, esas expresiones pueden ser consideradas como funciones de un solo argumento. Una función de este tipo es claramente diferente de una función cuyos argumentos son objetos.

> Llamamos ahora *funciones de primer nivel* a las funciones cuyos argumentos son objetos; y las funciones cuyos argumentos son funciones de primer nivel pueden ser llamadas *funciones de segundo nivel* (GA, pág. 37).

Una función de segundo nivel cuyo valor es siempre un valor de verdad puede ser llamada un concepto de segundo nivel.

En la sección 22 ofrece Frege ejemplos de funciones de segundo nivel. Uno de ellos es Φ(2). Algunos valores de esta función son números; por ejemplo, para el argumento ξ + 1 el valor de la función es 3. Otros son valores veritativos; por ejemplo, para el argumento ξ + 1 = 4 el valor es lo Falso. «Esta función de segundo nivel», dice Frege, «es distinta del número 2 mismo, puesto que, al igual que todas las funciones, ésta es insaturada» (GA, pág. 38).

La barra horizontal es utilizada para construir una función —Φ(2) que marque las funciones de 2 cuyo valor es siempre un valor veritativo. Esta función es por tanto un concepto de segundo nivel al que, según Frege, podemos llamar «propiedad del número 2». Todos y sólo aquellos conceptos de primer nivel bajo los cuales cae el número 2, caen bajo este concepto de segundo nivel.

Junto a las funciones de primero y de segundo nivel existen también conceptos de desigual nivel. Un ejemplo es la primera derivada de una función en el análisis, que es una función de dos argumentos, el primero de los cuales debe ser una función de primer nivel, y el segundo un objeto.

> Tenemos también una función de desigual nivel con dos argumentos en –Φ(ξ), donde «ξ» ocupa y hace reconocible

el lugar del argumento de objeto, y «$\Phi(\ )$» el del argumento de función. Puesto que el valor de esta función es siempre un valor veritativo, podemos llamarla una relación de desigual nivel. Es la relación de un objeto con el concepto bajo el cual cae (GA, pág. 39).

Un ejemplo de un concepto de segundo nivel cuyo argumento tiene que ser una función de dos argumentos es la relación de muchos-a-uno, que aquí se define, siguiendo las líneas de *Los fundamentos de la aritmética*, como sigue: Si $X(\xi, \zeta)$ es una relación tal que a partir de $X(a, b)$ y $X(a, c)$ se sigue universalmente que $c = b$, entonces $X(\xi, \zeta)$ es una relación de muchos-a-uno.

¿Cómo vamos a expresar la generalidad respecto a las funciones de segundo nivel? Aquí estamos nuevamente ante una innovación en los *Grundgesetze*. Comencemos considerando las funciones de segundo nivel de un argumento (tales como la de *ser una propiedad del número dos* o la de *tener un objeto que cae bajo él)*. Frege introduce la notación

$$M_\beta(\Phi(\beta))$$

como una variable que va a discurrir sobre tales funciones de segundo nivel con un argumento, de la misma manera en que $f(\xi)$ discurría sobre funciones de primer nivel con un argumento. La letra cursiva mayúscula M es una variable que indica que estamos hablando de funciones de segundo nivel; la β suscrita sirve para mostrar que la variable va a discurrir sobre funciones cuyo campo de aplicación son funciones de un solo argumento; y la expresión «$\Phi(\beta)$» marca el lugar del argumento reservado para la función que reemplace a «Φ» —la «β» sirve para indicar que la función en cuestión tiene que ser también una función con un solo argumento. La variable que Frege introduce aquí es usada únicamente en un lugar en el desarrollo completo de su sistema, en un único axioma que en lenguaje ordinario podría expresarse así:

> Lo que es válido para toda función de primer nivel con un solo argumento, es válido también para cualquier función (GA, pág. 42).

La formulación de este axioma comporta el uso de una función *de tercer nivel* que sea válida para las funciones de segundo nivel, a saber,

$$(f)M_{\beta}(f(\beta))$$

Hubiera sido posible introducir una variable como $M_{\beta}d(\Phi(\beta,d))$ para funciones de segundo nivel que pudiera ser válida para funciones con más de un argumento (tales como la relación de muchos a uno, o la de ser simétrica). Pero Frege no lo hace (GA, págs. 48-49). En lugar de ello, adopta lo que él llama un modo más económico de expresar la generalidad respecto a esas funciones tomando al curso de valores de una función como un sustituto de ella. Puesto que el curso de valores es un objeto, podemos siempre utilizar funciones cuyos argumentos sean objetos, en lugar de recurrir a funciones de nivel superior cuyos argumentos sean funciones de nivel inferior.

Capítulo IX

Grundgesetze der Arithmetik, II

Tras haber presentado en el primer capítulo de los *Grundgesetze* sus signos primitivos, Frege dedica el segundo capítulo al tema de las definiciones. La definición, insiste el autor, es meramente un proceso de abreviación; y para expresar la definición introduce, al igual que hizo en la *Conceptografía*, el signo ||-. Una definición es una estipulación que establece que un signo recién introducido va a tener el mismo sentido y referencia que un signo complejo compuesto de signos ya familiares. Así, en el texto de Frege, la definición tendrá la siguiente forma:

> ||- definiens (antiguo signo complejo) = definiendum (nuevo signo más simple).

Tan pronto como el signo ha sido introducido, la definición se convierte en una verdad y puede ser usada como una proposición o teorema del sistema.

Después de incorporar el signo de la definición, Frege establece reglas para la formación correcta de nombres en su sistema formal: deberán ser signos introducidos o bien como primitivos o bien por definición, y tendrán que obedecer las convenciones acordadas para el tipo de nombre al que esos signos pertenecen. Todo

nombre bien formado tiene que tener una referencia; y este requisito es asegurado mediante un procedimiento recursivo. Partimos de un conjunto de nombres primitivos y sus referencias, y luego establecemos paso por paso las reglas para la extensión de la esfera de tales nombres.

Hemos de recordar que por virtud de este artificio en el desarrollo fregeano, el sentido de la palabra «nombre» ha adquirido una dimensión extremadamente amplia. Los nombres propios, que son nombres de objetos, incluyen proposiciones completas, que son nombres de valores veritativos; y junto a los nombres propios, hay también nombres de funciones.

Cuando, por necesidades del propio sistema, Frege se pregunta en qué circunstancias tienen referencia los nombres, ya no puede recurrir a ejemplos tomados de la vida y del lenguaje ordinario, como los utilizados en *Los fundamentos de la aritmética* y en artículos como «Función y Concepto» para la exposición informal de su filosofía, porque la existencia de objetos como Julio César y la Luna es una cuestión de hechos empíricos. En los inicios de la formalización de la lógica, los únicos objetos cuya existencia cabe dar por garantizada son los dos valores veritativos, lo Verdadero y lo Falso.

El vocabulario primitivo de los *Grundgesetze* consta sólo de los ocho símbolos introducidos en el capítulo primero. Y ninguno de ellos es nombre de un objeto: todos son nombres de funciones.

De entre ellos, tres son nombres de funciones de primer nivel con un argumento:

$$\text{‘}{—}\xi\text{’},\quad \text{‘}{\top}\xi\text{’},\quad \text{‘}/\xi\text{’}.$$

Dos son nombres de funciones de primer nivel con dos argumentos:

$$\text{‘}\xi \rightarrow \zeta\text{’},\quad \text{‘}x = z\text{’}$$

Dos son nombres de funciones de segundo nivel con un argumento:

$$`(x)\Phi(x)' \quad `\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)'.$$

Uno es el nombre de una función de tercer nivel.

$$(f)M_{\beta}(f(\beta)).$$

Partiendo del hecho de que los nombres de valores veritativos representan alguna cosa, Frege amplía entonces la esfera de los nombres mostrando cómo pueden formarse otros nuevos a partir de los anteriores insertando un nombre ya existente en el lugar para el argumento de otro nombre que también existía ya. Establece detalladas estipulaciones para la construcción recursiva de nombres conforme a este método y muestra cómo han de ser aplicadas a los nombres primitivos. Podemos ofrecer un ejemplo relativamente simple que ilustre su procedimiento.

El nombre de una función de primer nivel con un argumento tiene una referencia, dice Frege, si el nombre propio resultante de rellenar el lugar del argumento con un nombre que tiene una referencia es a su vez un nombre propio con una referencia. Esto queda verificado, por ejemplo, en el caso del nombre de la función negación; si colocamos el nombre de un valor veritativo en el lugar del argumento de $-\!\!\!\!\top\xi$, el resultado es a su vez el nombre de un valor veritativo. Esto se sigue de la definición de la negación.

La noción de nombre propio parece intuitivamente más simple que la de nombre de una función; y ciertamente se recurre a la primera para aclarar la condición de que el nombre de una función tenga que tener una referencia. La razón de que Frege introduzca esta última condición antes de haber establecido la exigencia de que un nombre propio tenga una referencia, reside en que al comienzo de los *Grundgesetze* sólo contamos con

nombres de función, y de que los únicos objetos nombrables son los valores veritativos. Los primeros nombres propios serán los axiomas del sistema, que son nombres de lo Verdadero.

En una exposición quizá excesivamente prolija, Frege muestra que cada uno de los ocho nombres primitivos tiene una referencia. Luego prueba que lo mismo ocurre con todos los nombres compuestos a partir de los primeros de acuerdo con sus reglas. Y finalmente nos dice que todo nombre correctamente formado posee no sólo una referencia, sino también un sentido.

> Todo nombre de un valor veritativo así formado *expresa* un sentido, un *pensamiento*. O sea, por nuestra estipulación queda determinado bajo qué condiciones el nombre denota lo Verdadero. El sentido de este nombre —el *pensamiento*— es el pensamiento de que estas condiciones han sido satisfechas (GA, pág. 50).

No todos los nombres son, por supuesto, nombres de valores veritativos, incluso en este primitivo estadio del desarrollo de los *Grundgesetze*. Los signos primitivos, por ejemplo, son nombres de funciones. Estos signos tienen también sentidos. En el siguiente pasaje explica Frege cuáles son esos sentidos:

> Los nombres, sean simples o compuestos, que forman el nombre de un valor veritativo contribuyen a la expresión del pensamiento, y esta contribución de los componentes individuales es su *sentido*. Si un nombre es parte del nombre de un valor veritativo, entonces el sentido del primer nombre es parte del pensamiento expresado por el último nombre (GA, pág. 51).

Estos dos pasajes son de gran importancia filosófica. Aquí, en un único párrafo de los *Grundgesetze*, están enunciadas dos tesis que iban a ejercer una enorme influencia en la filosofía subsiguiente: que el sentido de las palabras viene dado por su contribución al sentido de

las proposiciones en las que las palabras ocurren, y que el sentido de las proposiciones mismas está dado por las condiciones bajo las cuales son verdaderas.

Frege pasa ahora a establecer siete principios para la introducción de definiciones. Los más importantes son los cuatro primeros aquí discutidos (los tres restantes se refieren a detalles de la notación).

1. Todo nombre adquirido por definición tiene que tener una referencia, que quedará garantizada si es retraducible a los ocho nombres primitivos.

2. Un mismo signo no puede ser definido más que una vez, a fin de prevenir la inconsistencia entre definiciones diferentes.

3. El nuevo nombre a introducir ha de ser simple, y no deberá contener ningún término que haya sido introducido en una ocasión diferente; nuevamente esta cautela responde a la eliminación de la posibilidad de inconsistencia.

4. El lado izquierdo de la identidad definicional (el definiens) ha de contener un nombre formado por nombres primitivos o que ya hayan sido definidos, y el signo del lado derecho (el definiendum) ha de contener un signo que no haya sido empleado previamente. La definición introduce al definiendum como un signo de significado equivalente que pueda reemplazar a, o ser reemplazado por, el definiens.

En el segundo volumen de los *Grundgesetze* es donde expone Frege con todo detalle sus concepciones filosóficas sobre la naturaleza de la definición (GA, §§ 56-7). Toda definición correcta, afirma Frege, debe satisfacer dos principios: el principio de completud y el principio de simplicidad. El principio de simplicidad exige que el símbolo a definir sea simple; el principio de completud requiere que la definición misma sea completa.

Frege dice que para que la definición de un predicado sea completa tiene que estipular su ocurrencia en

todo posible contexto. El concepto expresado por un predicado ha de tener un contorno bien delimitado; esto es, tiene que estar determinado para cada objeto si éste cae o no bajo tal concepto. Si hubiera objetos que no se ajustaran a esta condición, entonces el concepto carecería de contornos precisos, no habiendo en su lugar más que unos vagos límites confundidos con el fondo. De modo similar, un predicado que expresa un concepto ha de ser definido de modo tal que, para cada objeto, quede determinado si el predicado es o no es verdaderamente afirmable del objeto en cuestión.

¿Qué significa aquí ser «determinado»? ¿Tal vez que sólo un ser omnisciente podría saber para todos y cada uno de los predicados, en el caso de cada objeto individual, si el predicado era o no era verdadero? Lo que Frege quiere decir es que la definición de un predicado ha de establecer sin la menor ambigüedad las condiciones bajo las cuales ese predicado es verdadero de un objeto. Esto será suficiente para que el predicado, y el concepto a él subyacente, quede determinado, incluso aunque pueda haber muchos casos en los que nuestra humana ignorancia nos impida poder decidir si se cumplen o no las condiciones establecidas.

Un concepto que no está completamente definido es, en este sentido, sólo un cuasi-concepto, tal como un nombre propio sin referencia es sólo un cuasi-nombre. Los cuasi-conceptos son intratables por la lógica. Ni siquiera sus leyes más básicas les son aplicables. Tomemos la ley de exclusión de tercero: o $\Phi(X)$ o no $\Phi(X)$. Si «Φ» no expresa más que un cuasi-concepto, entonces habrá al menos un objeto X para el cual ni «$\Phi(X)$» ni «$\neg\Phi(X)$» serán válidos. «¿Tiene realmente sentido la cuestión 'Somos todavía cristianos', si está indeterminado a quién puede verdaderamente adscribirse el predicado 'cristiano', y a quién hay que negárselo?» (GA, II, § 56).

Si exigimos completud en la definición de conceptos, el mismo requisito es exigible a las funciones de todo tipo. Si la expresión «la mitad de...» no estuviera definida

para todos los argumentos, entonces un concepto como el representado por el predicado «... es tal que su mitad es menor que uno» sería también incompleto. Así pues, hemos de definir «la mitad de...» de manera tal que «la mitad de la Luna» tenga una referencia definida, cosa que le falta en el lenguaje ordinario, puesto que queda bastante indeterminado a qué parte de la luna se refiere la mentada expresión.

Aceptar la condición de completud comporta muy severas restricciones sobre el proceder de los matemáticos. Era muy frecuente entre ellos definir primeramente una función para un dominio limitado de objetos —por ejemplo, los enteros positivos— y mucho más tarde, tras haber hecho un amplio uso de la función, definirla nuevamente para un dominio que incluyera objetos diferentes —por ejemplo, los enteros negativos y el cero.

Frege insiste en que las definiciones graduales de este tipo han de ser rechazadas. Si la primera definición de la función deja abierta la cuestión de qué valores vaya a tomar como argumentos seleccionados de un dominio más amplio, entonces esa definición está violando ya el principio de completud. Si, por otra parte, la primera definición es completa en su inicio y ha establecido límites precisos para la función, podemos preguntar si la segunda definición establece los mismos límites que la primera u otros diferentes. En el primer caso, la coincidencia de límites es algo que necesita prueba, pues no puede ser meramente establecido; y hay que evitar las definiciones que presupongan el desarrollo de una prueba. En el segundo caso, la diferencia entre los límites significa que las dos definiciones se contradicen entre sí.

La definición gradual socava igualmente los teoremas que ya han sido probados. Por ejemplo, si la expresión «raíz cuadrada de 9» ha sido definida con una restricción al dominio de los enteros positivos, entonces podemos probar que hay solamente una raíz cuadrada de nueve. Pero este teorema se derrumba en el momento en que extendemos la definición a los números negativos y te-

nemos –3 y 3 como raíces cuadradas de 9. Y ¿cómo sabemos que hay sólo dos raíces cuadradas? ¿Está descartado que alguna definición posterior no nos obligue a reconocer cuatro u ocho? «Si no contamos con una definición final, tampoco contaremos con teoremas finales algunos. No podremos salir nunca de la incompletud y la vaguedad» (GA, II, § 61).

Lo que se aplica a los conceptos (funciones con un argumento cuyos valores son siempre valores veritativos) ha de aplicarse también a las relaciones (funciones de dos argumentos cuyos valores son siempre valores veritativos). Si una relación como *mayor que* no estuviera completamente definida, entonces un concepto como *mayor que cero* carecería igualmente de definición completa. Pero los matemáticos, denuncia Frege, no tienen reparo alguno en ofrecer definiciones graduales no sólo de predicados como «... es mayor que», sino incluso del signo «=» mismo.

La exigencia de definir funciones matemáticas y conceptos para objetos de todo tipo es una carga pesada, y cabría pensar que es posible obviarla estipulando que las expresiones para tales funciones tengan una referencia sólo cuando los argumentos sean números. Considérese el concepto *algo que sumado a sí mismo da uno como resultado*, que viene expresado por el predicado «$\xi + \xi = 1$».

Bajo esta estipulación sabremos que «la Luna + la Luna = 1» no es verdadera, puesto que la Luna no es un número. Pero esto no es suficiente para hacer que el signo de la adición esté bien definido. Pues, por nuestra estipulación, «la Luna + la Luna» no tendrá referencia, y por tanto la proposición «No es el caso que la Luna + la Luna = 1» tampoco será verdadera, con lo cual se dará nuevamente una violación del principio de exclusión de tercero.

Hay otro modo de evitar la exigencia de definición completa. Cuando establecemos leyes que contienen expresiones definidas solamente para números, deberíamos

cuidarnos de hacer de la restricción a los números una condición de la ley misma. Así:

Si a es un número y b es un número, entonces $a+b = b+a$.

Pero, tras una ligera manipulación, esta proposición permite probar a partir de ella la siguiente:

Si $\neg(a+b = b+a)$ y a es un número, entonces b no es un número.

Esta segunda proposición no puede ser propuesta cuando el dominio está restringido a los números. Pero si el dominio no está así restringido, entonces la cláusula antecedente sólo tiene sentido cuando el signo de adición ha sido completamente definido.

Por todo ello, Frege concluye que la definición condicional, al igual que la definición gradual, tiene que ser rechazada. «Todo símbolo ha de estar completamente definido de un plumazo» (GA, II, § 65).

El principio de simplicidad es presentado por Frege de manera mucho más breve que el principio de completud; sin embargo, es más difícil de entender, y está formulado de dos diferentes modos nada fáciles de conciliar.

En una formulación, este principio es simplemente una estipulación que dice que todo símbolo a introducir por definición tiene que ser un símbolo simple, en el sentido de que no tenga partes que a su vez sean símbolos. Cualquier símbolo o palabra tiene, por supuesto, partes físicas, pero eso no constituye impedimento alguno para la simplicidad mientras esas partes no tengan un papel asignado en el sistema de símbolos como signos independientes con significados propios. Así, aunque el signo «Platón» contiene las sílabas «plato», ello no impide que «Platón» sea un símbolo simple, puesto que tales sílabas no desempeñan en él el papel simbólico de la palabra «plato». Frege da una razón muy convincente del

principio así entendido: si el principio es violado, entonces podría suceder que las partes fueran también definidas separadamente y que esas definiciones contradijeran la definición del todo.

Sin embargo, Frege establece también su principio de una manera bastante más enigmática: «no podemos definir un símbolo o palabra definiendo la expresión en la cual ocurren, y cuyas restantes partes son conocidas» (GA, II, § 66). Al parecer, lo que aquí se prohíbe es un procedimiento que muy bien podría aplicarse a símbolos que no tuvieran partes que a su vez fueran símbolos; un procedimiento, por tanto, que no tiene por qué violar el principio de simplicidad en su forma obvia.

Frege ofrece dos consideraciones en favor del principio así establecido. La primera es que dar la referencia de una expresión y la referencia de una parte de ella es insuficiente para determinar la referencia de la parte restante. Obviamente, esto es cierto: no aprendo qué es la función cubo porque se me diga solamente que el valor de esa función es 27 para el argumento 3; ni aprendo el significado del predicado «... es sabio» porque se me diga solamente que ese predicado expresa un concepto que toma el valor *Verdadero* para el argumento Sócrates. Pero esta verdad no parece suficiente para establecer el principio de simplicidad, puesto que lo conecta sólo con la referencia de las expresiones y no con su sentido. Lo que primariamente establece la definición es una conexión entre el sentido, no la referencia, de las expresiones; y no se nos ha dado ninguna razón para eliminar la posibilidad de establecer el sentido de una parte de la expresión aduciendo el sentido del todo y el sentido de las restantes partes.

La segunda consideración de Frege discurre en torno a una metáfora. Si fuéramos a definir un símbolo violando este principio,

> sería primero necesario investigar —recurriendo a una metáfora del álgebra fácilmente inteligible— si la ecua-

ción tiene solución para lo desconocido, y si lo desconocido está inambiguamente determinado. Pero, como ya he dicho más arriba, no es factible hacer que la corrección de una definición dependa del resultado de una tal investigación (GA, II, § 66).

Estas palabras parecen añadir poco a lo que ya se dijo antes. En términos del ejemplo más arriba ofrecido, resolver la ecuación corresponde a establecer que *hay* una función que toma el valor 27 para el argumento 3 (como es el caso) y que hay *solamente una* función que toma el valor 27 para el argumento 3 (como no es el caso). Pero una vez más nos encontramos hablando de referencia cuando deberíamos estar hablando de sentido.

La metáfora algebraica es más convincente cuando se la utiliza como advertencia contra el intento de definir dos cosas en una sola definición, por ejemplo, definir el signo *igual* mientras se está definiendo lo que hay a su derecha y a su izquierda. «Para determinar dos cosas desconocidas no es posible utilizar una única ecuación» (GA, II, § 66).

Cabe preguntarse cómo cuadra el principio de simplicidad, en su segunda forma, con el principio de *Los fundamentos de la aritmética* «no buscar nunca el significado de una palabra aislada, sino sólo en el contexto de una proposición». ¿Infringe este nuevo principio la propia definición de número de Frege?

Hay ciertamente un problema general en la aplicación del principio de simplicidad fregeano a la definición de funciones.

A causa de su peculiar carácter de insaturación, los nombres de funciones no pueden, por supuesto, figurar en solitario en uno de los lados de una ecuación definitoria; sus lugares para los argumentos tienen siempre que ser llenados de una manera u otra. En mi escritura conceptual, esto se solventó, como ya hemos visto, con el uso de letras itálicas, que deben aparecer por tanto en el otro lado también. En el lenguaje utilizamos en

cambio pronombres y partículas («algo», «lo que», «ello») que indican de modo indeterminado. No hay aquí ninguna violación de nuestro principio; porque esas letras, pronombres, y partículas no representan nada; únicamente indican (GA, II, § 66).

Así, en lugar de definiciones de funciones, Frege ofrece en los *Grundgesetze* equivalencias entre cursos de valores. Efectivamente, la primera función definida por Frege, en el primer volumen, es una función cuya importancia se deriva del papel que tiene en su proyecto de reducir proposiciones acerca de funciones de nivel superior a proposiciones sobre sus cursos de valores. El signo a definir es «$\frown$»: la fórmula «$x \frown z$» pretende ser una regimentación de la expresión informal «x es un miembro de z». La definición dice como sigue:

$$\Vdash \acute{\alpha}(\neg(g)\ (u = \dot{\varepsilon}g\,(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ (g\,(\alpha) = \alpha) = \dot{\alpha} \frown u.$$

De acuerdo con esta definición, si se nos da un objeto A y una función $\Phi\ (\xi)$, la expresión «$A \frown \dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$» tendrá la misma referencia que «$\Phi(A)$»; y además (a fin de englobar los casos sobrantes), para cualquier objeto D y cualquier objeto G que no pertenezca a ese rango, la expresión «$D \frown G$» será un nombre para la clase vacía[1].

Otra función que podría sustituir a $\Phi\ (\xi)$ es $\dot{\varepsilon}(\xi + \varepsilon)$. Los valores de esta función son siempre cursos de valores. El curso de valores de esta función será por tanto un curso de valores doble, digamos $\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}(\alpha \geq \varepsilon)$. Un doble curso de valores para una función con dos argumentos que sea una relación será tomado como la extensión de esa relación. De aquí que Frege pueda servirse de su nueva notación cuando tenga que usar propiedades de relaciones para construir números.

A continuación procede Frege a definir, con ayuda de su notación $\frown$, una serie de funciones que ya utilizó en

[1] W. y M. Kneale, *El desarrollo de la lógica,* Madrid, Tecnos, 1972.

Los fundamentos de la aritmética para definir tanto al número como a los números individuales. En primer lugar, en la sección 37, introduce un signo para la relación de muchos-a-uno, y en la sección 38 recuerda la definición de equivalencia entre conceptos dada en los *Fundamentos.* Ahora introduce la palabra «mapeo» para expresar lo que hace una relación cuando correlaciona, en correspondencia de muchos-a-uno, los objetos que caen bajo el concepto *F* con los objetos que caen bajo el concepto *G*. Si a un concepto cuya extensión es Γ, lo llamamos un concepto-Γ, a una relación cuyo concepto es Δ la llamamos un concepto-Δ, y a una relación cuya extensión es *V*, una relación-*V*, entonces podemos decir que la relación-*V* *mapea* el concepto-Γ sobre el concepto-Δ. Si dos conceptos van a ser equivalentes, el mapeo ha de darse en las dos direcciones; esto es, no sólo debe la relación-*V* mapear el primer concepto sobre el segundo, sino que la relación que es la conversa de *V* debe mapear el segundo concepto sobre el primero.

Al igual que en los *Fundamentos*, Frege utiliza aquí el concepto de equivalencia para definir el número del concepto-Γ como la extensión del concepto *equivalente al* concepto-Γ. Y luego procede a definir al número 0 como el número que pertenece al concepto cuya extensión es $\grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon=\varepsilon)$, y al número 1 como el número que pertenece al concepto cuya extensión es $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$. La relación sucesor y la relación ancestral son también definidas, con alteraciones mínimas, del mismo modo que en los *Fundamentos.*

Una vez establecidas las funciones, las reglas de inferencia y las definiciones de su sistema, Frege puede ahora derivar los teoremas de sus axiomas. Y es lo que hace en el tercer capítulo.

Los axiomas, o principios, que dan título a la obra, están aquí presentados en un simbolismo moderno, en el que generalmente no hay necesidad de recurrir a las barras de juicio ni a las barras horizontales de Frege. Las equivalencias verbales para cada uno de los axiomas no

son exactas, pues sólo tienen un carácter de claves que ayuden al lector a captar la intención de Frege.

I. $a \rightarrow b \rightarrow a$ (si *a*, entonces si *b* entonces *a*).

IIa. $(x)(f(x) \rightarrow f(a)$ (lo que vale para todo objeto, vale para cualquier objeto particular).

IIb. $(f)M_{\beta}(f(\beta)) \rightarrow M_{\beta}(f\beta)$ (lo que vale para toda función monádica de primer nivel vale para cualquier función de ese tipo).

III. $g(a = b) \rightarrow (g[(f)fb \rightarrow fa)]$. (Hay un principio, llamado a veces de indiscernibilidad de los idénticos, que dice: si (i) *a* es idéntico a *b*, entonces (ii) lo que vale para *b* vale para *a*. Este axioma dice que si una función vale para (i), entonces vale para (ii). La negación es una función, de aquí que si (i) es falsa, entonces (ii) es falsa; lo cual nos da también la identidad de los indiscernibles.)

IV. $\neg(-a = \neg b) \rightarrow (-a = -b)$ (si no es el caso que el valor veritativo de *a* sea el mismo que el valor veritativo de no *b*, entonces *a* y *b* tienen el mismo valor de verdad; o, poco más o menos, si no *p*, entonces *p*).

V. $('\varepsilon f(\varepsilon) = '\alpha\, g(\alpha)) = ((x)f(x) = g(x))$ (si los cursos de valores de dos funciones son idénticos, entonces el valor de una función para un argumento dado es siempre el mismo que el valor de la otra función, y viceversa).

VI. $a = /\dot{\varepsilon}(a = e)$ (un objeto *A* es la sola y única cosa que es idéntica a *A*).

Estos axiomas están diseñados para introducir por turno los signos primitivos: en primer lugar el condicional, luego los cuantificadores para objetos y funciones, después el signo para la identidad, a continuación el de negación, más tarde el signo para los cursos de valores, y finalmente el operador de descripción. A partir de estos axiomas, mediante un limitado y especificado núme-

ro de modelos de inferencia, Frege se embarca en la tarea de derivar la totalidad de la lógica y de la aritmética. Las definiciones que ha dado, sostiene Frege, no suministran ningún material básico adicional, pero ayudan a abreviar las pruebas.

Anteriormente observamos que el aparato de los *Grundgesetze* no permite realmente la definición de funciones. En lugar de definiciones de funciones, Frege ofreció equivalencias entre cursos de valores. El recurso a este procedimiento ha sido posible por el axioma V, que permite transformar una igualdad de validez general entre dos funciones en una identidad entre sus cursos de valores. Así pues, hemos de preguntarnos cómo la introducción de cursos de valores resiste los rigurosos cánones de definición de Frege, tal como son establecidos en el segundo volumen de esta obra y que ahora acabamos de resumir.

Frege negó constantemente que los objetos pudieran ser creados por definición. Ningún matemático podría enumerar una lista de propiedades y luego decir: construyo una cosa que va a tener estas propiedades. Pero Frege niega que su procedimiento conduzca a esta situación: él se está limitando a dirigir la atención sobre algo que es común a dos funciones que tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento y a dar el nombre de «curso de valores» a ese elemento común. La transformación permitida por el axioma V no debe ser considerada como una definición.

> Ni la palabra «mismo», ni la palabra «curso-de-valores», o un símbolo complejo como $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, ni la reunión de ellos, están definidos por medio de ese axioma. Porque la proposición
>
> el curso de valores de la primera función es el mismo que el curso de valores de la segunda función
>
> es compleja, y contiene como parte la palabra «mismo», que debe ser considerada como completamente conocida. Similarmente sucede con el símbolo $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$, que es ya conocido (GA, II, § 146).

Frege admite inmediatamente que si su introducción de la noción de curso de valores tuviera el carácter de una definición, entonces violaría su principio de simplicidad. Pero es un error, afirma, considerar como definiciones la introducción de los signos primitivos; pues «sólo lo que es lógicamente complejo puede ser definido; lo que es simple puede solamente ser mostrado». Y continúa diciendo que al introducir cursos de valores no está haciendo nada realmente diferente de lo que otros matemáticos han hecho al hablar de dos funciones coincidentes, o de las extensiones de los conjuntos.

Frege tiene seguramente razón al decir que la explicación de los cursos de valores viola sus cánones de definición; pero es difícil ver qué razón tiene para negar que lo que nos está ofreciendo es una definición. La noción de curso de valores no es simple, sino compleja; y el simbolismo que la representa depende, de un modo que los otros símbolos básicos desconocen, de características de símbolos introducidos con anterioridad[2].

Al denunciar las violaciones de sus cánones por parte de otros matemáticos —la disimulada introducción de dos signos en una sola definición, por ejemplo— dice Frege:

> Esta penumbra es el requisito de muchos matemáticos para la realización de sus malabarismos y trucos lógicos. Los objetivos que pretenden alcanzar por este camino son indefectiblemente alcanzados mediante nuestra transformación, por el Axioma V, de una igualdad de validez general en una igualdad entre cursos de valores (GA, II, § 67).

Pero el uso que hizo Frege del axioma 5, lejos de tornar la penumbra en claridad, iba a hundir su propio y entero sistema en una oscuridad completa.

---

[2] Aunque hay que decir que, a la luz de la interdefinibilidad de las funciones veritativas, la noción de simplicidad lógica que Frege está aquí aduciendo es en todo caso una noción oscura.

Hacia el final del primer volumen de los *Grundgesetze*, Frege establece con gran detalle sus reglas de inferencia: todas ellas forman un sistema bastante más complicado que el de la *Conceptografía,* pero permite transitar con más facilidad de los axiomas a los teoremas. No vale la pena recorrerlas aquí en detalle, puesto que están formuladas atendiendo a las peculiaridades particulares del sistema fregeano. Dado que los *Grundgesetze* son una sistematización de la lógica formal, hay muchos y más elegantes caminos para alcanzar su objetivo. Sin duda, lo que Frege perseguía no era tanto la formalización de la lógica como la prueba de que la aritmética es derivable de sus axiomas, ninguno de los cuales parece envolver el menor elemento que no sea puramente lógico. Tampoco tiene mucho sentido seguir aquí el curso de las pruebas que Frege ofreció. Pues poco antes de la publicación del segundo volumen de los *Grundgesetze* se descubrió que había una grieta fatal en el sistema.

En junio de 1902, Bertrand Russell, que estaba redactando un libro sobre los principios de la matemática en el que hacía un uso considerable de las ideas de Frege, escribió a éste señalándole una manifiesta contradicción en su sistema. Russell planteaba la siguiente cuestión: Supóngase que *w* es el predicado «... es un predicado que no puede ser predicado de sí mismo». ¿Puede *w* ser predicado de sí mismo? Sea cual sea la respuesta que demos, estamos en un callejón sin salida. Y continuaba formulando la correspondiente paradoja sobre las clases. Fue esta paradoja la que sumió a Frege en la más profunda consternación cuando llegó a sus manos. Así es como expone el propio Frege la paradoja de Russell:

> Nadie estaría dispuesto a afirmar que la clase de los hombres sea un hombre. Tenemos aquí una clase que no pertenece a sí misma. Digo que algo pertenece a una clase cuando cae bajo el concepto cuya extensión es esa clase. Fijemos ahora nuestra atención en el concepto: *clase que no pertenece a sí misma*. La extensión

de este concepto (si podemos hablar de su extensión) es así la clase de las clases que no pertenecen a sí mismas. Para abreviar, la llamaremos la clase C. Preguntemos ahora si esta clase C se pertenece a sí misma. Supongamos primero que sí se pertenece. Si algo pertenece a una clase, entonces cae bajo el concepto cuya extensión es esa clase. Así, si nuestra clase se pertenece a sí misma, entonces es una clase que no se pertenece a sí misma. Nuestra primera suposición conduce así a una contradicción. Supongamos ahora que nuestra clase C no pertenece a sí misma; entonces cae bajo el concepto cuya extensión es ella misma, y por tanto se pertenece a sí misma. De nuevo volvemos a desembocar aquí en una contradicción (GA, II, Apéndice).

Con toda justificación, Frege cayó en un abatimiento profundo cuando recibió la carta de Russell. Su correspondencia con él durante el verano y el otoño de 1902 muestra a los dos filósofos empeñados en encontrar una solución al problema. Frege insistía en mantener las líneas fundamentales de su sistema, y eventualmente pensó que había encontrado un modo de apuntalarlo. En octubre escribió un postscripto al segundo volumen de los *Grundgesetze*, entonces en prensa. El volumen apareció en 1903 con el postscripto, que comenzaba así:

Difícilmente puede caber mayor desgracia para un escritor científico que tener resquebrajado uno de los pilares de su edificio después de haber terminado la obra.

Ésta era la posición en que me colocó una carta del Sr. Bertrand Russell justamente cuando la impresión de este volumen estaba a punto de editarse. Se trata de mi Axioma V. Nunca se me ha ocultado que carecía de la evidencia que los otros axiomas poseen y que con toda propiedad debe exigirse a una ley lógica. Y de hecho así indiqué este punto débil en el Prefacio al vol. I (pág. vii). De haber conocido algún sustituto, con gusto hubiera prescindido de este pilar. E incluso ahora no alcanzo a ver cómo puede ser establecida científicamente la aritmética; de qué manera pueden ser aprehendidos los números como objetos lógicos y sometidos a

revisión si no nos está permitido —al menos condicionalmente— pasar de un concepto a su extensión[3]. ¿Puedo hablar siempre de la extensión de un concepto —hablar de una clase? De no ser así, ¿cómo reconocer los casos excepcionales? De la coincidencia en extensión de un concepto con la de otro concepto, ¿podemos inferir siempre que cualquier objeto que caiga bajo uno de los conceptos cae igualmente bajo el otro? Éstas son las cuestiones planteadas por la comunicación del Sr. Russell (GA, II, pág. 253).

El axioma V de Frege, como se recordará, era:

$$(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = ((x)f(x) = g(x))$$

Esta proposición nos dice que si los cursos de valores de dos funciones son idénticos, entonces el valor de una función para un argumento dado es siempre el mismo que el valor de la otra función: podemos dar el paso desde una clase a la función correspondiente. Y, a la inversa, también nos dice que si el valor de una función para un argumento dado es siempre el mismo que el valor de la otra función para el mismo argumento, entonces los cursos de valores son idénticos: podemos dar el paso desde una función a la clase correspondiente. Frege tomó la paradoja de Russell como evidencia de que no podemos transformar una identidad de cursos de valores en una identidad general. Sin embargo, pensó que la paradoja no destruye la posibilidad de transformar una identidad general en una identidad de cursos de

[3] Éste era un punto sobre el que Frege había cambiado de parecer. En *Los fundamentos de la aritmética,* tras haber definido el número que pertenece al concepto *F* como la extensión del concepto «equivalente al concepto *F*», añade en una sorprendente nota a pie de página: «Creo que en lugar de "extensión del concepto" podríamos escribir simplemente "concepto"» (FA, pág. 180). Y esto lo repite, sin la menor vacilación, en «Concepto y objeto» (CO, pág. 243). Es difícil reconciliar esta despreocupación con la insistencia de Frege en afirmar que los números son objetos.

valores. De acuerdo con ello modificó el axioma V de manera que permitiera la transición de una identidad general a nivel de la función a una identidad entre clases, pero que no permitiera ya la correspondiente transición entre clases y funciones. Este debilitamiento bloquearía, a su juicio, la formulación de la paradoja russelliana y permitiría sin embargo que la aritmética fuera derivada de la lógica como él proponía.

No hay necesidad de explicitar la modificación introducida por Frege en su sistema, que le llevó al fracaso por dos caminos. En primer lugar, el debilitamiento del axioma invalidaba las pruebas de una serie de importantes teoremas, por ejemplo el teorema de que todo número natural tiene un sucesor. En segundo lugar, aunque la paradoja de Russell no puede ser probada en el sistema, es posible probar dentro del sistema (como el lógico polaco Lesniewski mostró en 1930) que no hay dos objetos distintos, lo cual es inconsistente con la tesis de que lo Verdadero y lo Falso son dos objetos distintos.

Ninguno de estos hechos era conocido por Frege cuando el segundo volumen de los *Grundgesetze* fue publicado, pero parece verosímil que llegara a tomar conciencia al menos del primero hacia el año 1906[4]. A partir de esta fecha y hasta muy poco antes de su muerte no volvió a escribir nada sobre los fundamentos de la matemática; en una carta habló del completo fracaso que había acompañado a sus intentos de clarificar la naturaleza del número. Llegó incluso a abandonar su idea fundamental de que los números eran clases o conjuntos. En un artículo no publicado y escrito por el año 1924 habló de la tentación que el lenguaje engendra en nosotros de formar nombres propios a los que no corresponde ningún objeto. Y continuaba así:

> Un ejemplo particularmente indicativo de esto es la formación de un nombre propio según el modelo de «la

[4] Aquí sigo la exposición de Dummett en *Frege, Philosophy of Mathematics,* Londres, Duckworth, 1991, pág. 6.

extensión del concepto *a*», por ejemplo, «la extensión del concepto *estrella*». Debido al artículo determinado, esta expresión parece designar un objeto; pero no hay objeto alguno para el que esta frase pudiera ser una designación lingüísticamente apropiada. De aquí han surgido las paradojas de la teoría de conjuntos que han asestado un golpe mortal a la propia teoría conjuntista. Yo mismo cedí a esta ilusión cuando, en mi intento de proporcionar una fundamentación lógica para los números, traté de interpretar los números como conjuntos (NS, págs. 288-289).

En su último año de vida, Frege volvió a la posición kantiana que se había empeñado en refutar al comienzo de *Los fundamentos de la aritmética*: puesto que la aritmética era a priori, pero había resultado no ser analítica, tendría que estar basada, al igual que la geometría, en la intuición.

En su último artículo, «Números y Aritmética», habla con desprecio de «números de jardín de infancia» —los números que dan respuesta a la cuestión «¿Cuántos?», y a cuya elucidación había dedicado los mejores años de su vida. Una vez había creído, nos dice ahora, que era posible conquistar el entero dominio de los números siguiendo una línea puramente lógica que partía de los números de jardín de infancia; pero ahora se da cuenta de su enorme error:

> Cuanto más he pensado en ello, más convencido he quedado de que la aritmética y la geometría han nacido del mismo suelo, que es ciertamente el geométrico, de suerte que la entera matemática es propiamente geometría. Sólo bajo esta concepción se nos manifiesta la matemática en la total unidad de su esencia. El contar, que ha surgido psicológicamente de una demanda de la vida práctica, ha extraviado a los eruditos (NS, página 297).

CAPÍTULO X

Investigaciones lógicas, I

Entre los años 1918 y 1923 publicó Frege tres artículos en una revista alemana, *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*. Sus títulos pueden ser traducidos como «El Pensamiento», «La Negación» y «Composición de Pensamientos». Proyectados como capítulos de un futuro libro que habría de llamarse *Investigaciones lógicas*, los tres ensayos fueron reunidos y publicados póstumamente en 1975 bajo ese mismo título[1]. Estos artículos representan lo más acabado de los sucesivos intentos de Frege de presentar su filosofía de la lógica desarrollada en un todo sistemático. Igualmente han sido publicados con posterioridad algunos otros bosquejos que sobrevivieron a la muerte del autor. En lo que sigue me ceñiré al curso de la exposición de los ensayos publicados, aunque alguna que otra vez suplementaré sus argumentos con material extraído de los bosquejos inacabados.

Estos tres ensayos finales son los de más fácil lectura de todos los escritos fregeanos. Raramente se recurre en ellos al simbolismo, y la propia escritura conceptual de Frege está totalmente ausente. Al lector introducido en la

[1] Las «Investigaciones lógicas» se encuentran incluidas en el libro: *G. Frege, Ensayos de semántica y filosofía de la lógica,* compilación, traducción e introducción de Luis M. Valdés, Madrid, Tecnos, 1997.

filosofía analítica del siglo XX, las cuestiones filosóficas que aquí trata Frege le resultarán más inmediatamente familiares que las que ocuparon su atención durante los periodos inicial y medio. Sin embargo, muchos de los principales temas de estos ensayos han venido formando parte de las enseñanzas de Frege desde los tiempos de la *Conceptografía*.

Ello es particularmente evidente desde el comienzo del ensayo «El Pensamiento», un renovado ataque al psicologismo en lógica. La tarea de la lógica, dice Frege, es discernir las leyes de la verdad. Pero hay dos clases de leyes: prescriptivas y descriptivas. Las leyes morales y civiles prescriben lo que debe hacerse; pero con frecuencia la conducta real de la gente no se conforma a ellas. Las leyes de la naturaleza establecen características generales de los sucesos naturales, y lo que sucede no puede dejar de conformarse a tales leyes. Las leyes de la lógica se parecen más a las leyes de la naturaleza que a las leyes civiles, aun cuando desembocan en prescripciones sobre cómo deberíamos pensar y realizar inferencias.

¿Se ocupa la lógica de leyes del pensamiento? Aquí hay que volver a introducir una distinción. Si hablamos de las leyes lógicas como leyes del pensamiento, entonces estamos pensando en leyes que, como los principios de la moral o las leyes del Estado, prescriben cómo hemos de actuar, y no en leyes que, como las de la naturaleza, definen el curso real de los sucesos. El modo real en que los seres humanos piensan no siempre se ajusta a las leyes de la lógica, como tampoco su conducta obedece siempre a la ley moral (NS, pág. 157).

Por «leyes del pensamiento» podemos entender, sin embargo, leyes psicológicas que describen procesos mentales y que relacionan éstos con sus causas. Una ley de este tipo no sería una ley lógica, puesto que no haría ninguna distinción entre pensamientos verdaderos y pensamientos falsos: el error y la superstición tienen sus causas al igual que la tiene el conocimiento correcto.

> El campesino cuya fortuna está ligada, para bien o para mal, con el clima, busca los medios de determinar por anticipado cómo va a ser el tiempo. No es de extrañar que intente ligar las fases de la luna con las variaciones climáticas y se pregunte si una luna llena no anunciará un cambio de tiempo. Si esto llega a confirmarse... a partir de ese momento creerá que el tiempo está conectado con la luna, y esta creencia arraiga en él porque los casos que hablan en favor de ella le dejan una impresión mayor que aquellos que no se fijan tan firmemente en su memoria; y el campesino piensa que ahora conoce este dato por experiencia (NS, páginas 2-3).

El éxito de la teoría de la evolución puede suscitar tal vez la cuestión de si las leyes del pensar humano han evolucionado. Una inferencia que es válida en este momento, ¿lo será también dentro de miles de años, o lo fue en los lejanos tiempos de la prehistoria? (NS, pág. 4).

Esta pregunta envuelve claramente una confusión entre las leyes que dicen cómo piensa de hecho la gente y las leyes de la inferencia válida. La tarea de la lógica es descubrir las leyes de la verdad, no las leyes del pensar. Ni que decir tiene que, una vez descubiertas, las primeras suministrarán la base para las leyes prescriptivas del pensamiento y quizá también un elemento en la explicación causal de los procesos mentales reales (P, [pág. 58]*).

La lógica se ocupa por tanto de las leyes de la verdad. Así pues, ¿qué es la verdad? ¿es una propiedad? ¿O una relación? Algunos pensadores han propuesto que la verdad es una correspondencia entre una representación (una figura física o mental, por ejemplo) y lo representado. Pero lo que una figura física representa depende de la intención —que es algo mental— del que la crea.

* Para el criterio de paginación de los ensayos de filosofía de la lógica tratados en este capítulo, véase la primera nota de la página de abreviaturas en las referencias a las obras de Frege que figura al principio de este libro *[N. del T.]*.

La correspondencia completa entre una representación mental y una realidad física es imposible; por tanto, nada podría ser totalmente verdadero si la verdad consistiera en una correspondencia.

Por otra parte, si definimos a la verdad como una suerte de relación o característica, siempre cabe plantearse la cuestión de si es *verdad* que la representación en cuestión posee la característica especificada o está en la relación apropiada. «Y así estaríamos en la situación de un hombre colocado sobre un ingenio que da un paso adelante y hacia arriba, pero el escalón que acaba de subir cede y el hombre vuelve a caer donde se encontraba antes» (NS, pág. 146). Nos vemos obligados a concluir que el contenido de la palabra «verdadero» es *sui generis* e indefinible (P, [pág. 60]).

La indefinibilidad de la verdad es un tema recurrente en los escritos iniciales y finales de Frege. Pero en la teoría de su periodo medio, la verdad no era una propiedad de nada; más bien lo Verdadero era un objeto que todas las proposiciones verdaderas nombraban. Ahora vuelve a acariciar la idea de que la verdad sea una propiedad, aunque una propiedad indefinible.

Si la verdad es una propiedad indefinible, *¿de* qué es una propiedad? La verdad o falsedad de las figuras o imágenes —si dejamos a un lado el sentido de «verdad» en el cual es equivalente a «autenticidad»— se reduce a la verdad o falsedad de las proposiciones que expresan sus contenidos. Así pues, ¿diremos que la proposición es la portadora real de la verdad? Bien, una oración es una serie de sonidos que tiene un *sentido;* y cuando decimos que una proposición es verdadera, lo que realmente queremos decir es que su sentido es verdadero. La verdad de una oración queda preservada cuando se la traduce a los diferentes sonidos de una lengua extranjera, y es concebible que el mismo conjunto de sonidos fuera verdadero en una lengua y falso en otra (NS, pág. 141). Hay oraciones que no pueden ser clasificadas como verdaderas o falsas —las órdenes, por ejemplo. Estas ora-

ciones tienen sentido, pero Frege niega que expresen pensamientos (P, [pág. 62]). Un pensamiento es el sentido de una oración o proposición asertórica. Por tanto, es el *pensamiento* el que es el portador primario de la verdad y la falsedad; y ciertamente esto es lo que entendemos por un pensamiento, «algo respecto a lo cual tiene absoluto sentido la cuestión de la verdad».

¿Qué más puede decirse de un pensamiento, además de ser portador de la verdad y la falsedad? En primer lugar, es imperceptible para los sentidos. Se lo obtiene envuelto, dice Frege, en el perceptible ropaje de una proposición, y así podemos acceder a él: la proposición *expresa* el pensamiento. Cuando el filósofo quiere hablar de pensamientos no le es posible exhibirlos directamente ante su audiencia como un mineralogo puede mostrar un cristal de cuarzo: tiene que presentarlos arropados bajo una forma lingüística (P, [pág. 66, n. 4]).

Si la verdad es una propiedad de los pensamientos, y los pensamientos son imperceptibles, entonces la verdad no puede ser una propiedad sensible, como un perfume, un sabor, o un color. Pero, ¿no vemos, por ejemplo, que el sol ha salido, y por tanto vemos que *es verdad* que el sol ha salido? No: vemos el sol naciente; pero *que el sol ha salido* no es algo que nosotros veamos, aunque lo aceptamos como verdadero sobre la base de lo que vemos. Si nos apetece decir que vemos que una flor tiene cinco pétalos, entonces no estamos usando la palabra «ver» para registrar una experiencia visual; lo que con nuestra expresión significamos está entremezclado con los procesos de pensar y de juzgar (NS, pág. 149). Y hay muchas verdades cuya aceptación no está basada en impresiones sensoriales; por ejemplo, que no huelo nada en el momento presente. Pero esta imperceptible propiedad de los imperceptibles pensamientos no deja de ser una propiedad extraña por demás.

> La oración «Huelo aroma de violetas» tiene justamente el mismo contenido que la oración «Es verdad que huelo

> aroma de violetas». Así pues, parece que no se ha añadido nada al pensamiento porque le adjunte la propiedad de la verdad. Pero con todo, ¿no se produce un gran resultado cuando después de muchas dudas y laboriosas investigaciones el científico puede finalmente decir: «Lo que había conjeturado es verdadero»? (P, [pág. 61]).

La verdad es tan *sui generis* que tal vez ni siquiera pueda llamársela realmente propiedad en absoluto.

Frege compara a veces el predicado «verdadero» con el predicado «bello». A diferencia de la verdad, la belleza admite grados: una cosa puede ser más bella que otra. Lo que es verdadero, es verdadero con independencia de que nosotros reconozcamos que lo sea; lo que es bello, es bello para la persona que lo experimenta como tal. Cuando pretendemos objetividad en los juicios sobre lo bello, lo que estamos sosteniendo es que algo será considerado bello por cualquier ser humano normal, «y ninguno de nosotros puede hurtarse al pensamiento de que él es tan semejante al ser humano normal que se cree autorizado a hablar en nombre de éste» (NS, pág. 143). Pero la normalidad misma, mantiene Frege, es relativa a tiempos y lugares. No ocurre así con la verdad.

En este punto retoma Frege una distinción familiar al lector desde sus primeros escritos: la distinción entre pensamiento y aserción. Las oraciones «La puerta está abierta» y «¿Está abierta la puerta?» tienen, según Frege, el mismo contenido y expresan el mismo pensamiento, el pensamiento de que la puerta está abierta; pero la primera proposición afirma además que su contenido es verdadero, mientras que la segunda incorpora la pregunta por la verdad de su contenido[2]. Es claramente posible

[2] Frege podría haber llegado a decir que la proposición «Abre la puerta» tenía también el mismo contenido, pero que, además, exigía que el contenido se hiciera verdadero. Pero en lugar de ello, aunque sin razón convincente alguna, negaba que las oraciones imperativas expresasen pensamientos.

expresar un pensamiento sin declarar que sea verdadero. Es igualmente posible tener un pensamiento en la mente sin aceptarlo como verdadero. Hemos de distinguir por tanto entre tres diferentes operaciones: (1) la captación de un pensamiento —el pensar—; (2) el reconocimiento de la verdad de un pensamiento —el juzgar—; y (3) la manifestación de ese juicio —el aseverar.

Para expresar una aserción, la palabra «verdadero» no es ni necesaria ni suficiente. En la vida real, la aserción «*p*» dirá exactamente lo mismo que la aserción «*p* es verdadero»; y en las situaciones ficticias, como en el escenario, «*p* es verdadero» no será una aserción más real que «*p*». De aquí, nuevamente, que nada parece que se añada al pensamiento por el hecho de atribuirle la propiedad de la verdad.

Como con frecuencia ha hecho antes, Frege distingue entre un pensamiento y lo que él llama el colorido que envuelve a la expresión de éste. El lenguaje científico presenta los pensamientos, por así decirlo, en blanco y negro; pero en los asuntos humanos, las proposiciones suelen revestir a los pensamientos de coloreados ropajes, con manifestaciones de sentimientos, interjecciones y expresiones como «¡Ay!» o «A Dios gracias», o recurriendo al uso de palabras cargadas de sentido como «chucho» en lugar de lisa y llanamente «perro». Estos rasgos de las proposiciones no afectan a su verdad: una proposición que contenga la palabra «chucho» en lugar de «perro» no se convierte en falsa meramente porque la persona que la pronuncia no sienta el menosprecio que la primera expresa (NS, pág. 152).

Cuanto menos colorido tenga un texto científico, más fácil es traducirlo de un lenguaje a otro; y cuanto más color poético posea, más difícil será verterlo con fidelidad. La gramática de los lenguajes naturales es una mezcla de elementos lógicos y psicológicos; de no ser así, todos los lenguajes tendrían la misma gramática. Esto es lo que hace la traducción difícil, aunque también significa que el aprendizaje de diferentes lenguas nos ayuda a aislar el blanco-y-negro del sentido lógico de las diver-

sas clases de colores con las que pueda estar animado. El colorido puede ser de importancia fundamental para la belleza de una frase, pero la belleza no es la verdad, ni la verdad belleza (P, [pág. 63]; NS, pág. 154).

Algunas formas de las oraciones (por ejemplo, el uso de un verbo en voz pasiva en lugar de activa) pueden obedecer a razones de énfasis, sin que ello afecte a sus valores veritativos. Otras formas pueden servir para relacionar el pensamiento expresado por la proposición con otros pensamientos que no están expresados en ella.

> Con la oración «Alfredo no ha llegado todavía» se dice efectivamente «Alfredo no ha llegado» y además se sugiere, pero solamente se sugiere, que se espera su llegada. No puede decirse que el sentido de la oración sea falso porque no se espere la llegada de Alfredo (P, [pág. 64]).

La cuestión que estos ejemplos ilustran es ya familiar: el contenido de una oración va con frecuencia más allá del pensamiento que esa oración expresa[3]. Pero Frege lleva la cuestión a un punto que jamás había sido investigado hasta ahora en profundidad:

> El mero texto que puede ser retenido por la escritura o el fonógrafo no es suficiente para la expresión del pensamiento (P, [pág. 64]).

Lo que aquí está considerando Frege son las complicaciones introducidas por los tiempos verbales y por expresiones como «hoy», «aquí» y «yo».

Si una oración contiene un verbo en presente para indicar tiempo (como en «Está nevando»), entonces es necesario saber en qué momento se utilizó la oración para captar el pensamiento expresado por ella. «Por tanto», dice Frege, de manera no muy feliz, «el tiempo de

---

[3] En la anterior terminología de la *Conceptografía* podría decirse que el contenido de una proposición incluye algo más que su contenido judiciable.

emisión es parte de la expresión del pensamiento». Y continúa diciendo que algo similar sucede con el uso del pronombre en primera persona. «Yo tengo hambre» dicho por Pedro expresa un pensamiento diferente del que expresa «Yo tengo hambre» dicho por Pablo. Uno puede ser verdadero y el otro falso. Parece obvio decir, como más tarde hace Frege, que la persona que expresa un pensamiento es una circunstancia que forma parte de la expresión de ese pensamiento. Pero en cualquier caso, tenemos en estas dos oraciones un ejemplo de que una y la misma proposición puede, en contextos diferentes, expresar un pensamiento diferente.

Según Frege, la situación opuesta puede darse también. Si yo digo el 9 de diciembre «Estaba nevando ayer», expreso el mismo pensamiento que si el 8 de diciembre hubiera dicho «Está nevando hoy». Y presumiblemente Frege habría dicho lo mismo de las expresiones «Tú tienes hambre» usada por mí y «Yo tengo hambre» usada por ti. Estamos aquí ante el caso en que dos proposiciones diferentes pueden, en diferentes tiempos o en diferentes bocas, expresar el mismo pensamiento.

Para ilustrar el problema con el pronombre en primera persona, Frege da un ejemplo particularmente complicado que aquí podemos exponer en forma ligeramente simplificada. Supóngase que un cierto Dr. Brian Smith dice a uno de sus pacientes, Matthew, «Yo he sido herido». Tres días después, Matthew dice a sus amigos Mark, Luke y John, «Brian Smith ha sido herido». ¿Expresa esta proposición el mismo pensamiento que el expresado por el propio Brian Smith tres días antes?

Frege no da una respuesta inmediata: en lugar de ello invita al lector a considerar los pensamientos generados en las mentes de los que escuchan la proposición. Lo que los amigos de Matthew entiendan por esa proposición puede depender de lo que cada uno de ellos supiera de antemano. Mark, otro paciente del Dr. Smith, entenderá la proposición del mismo modo que Matthew. Pero Luke, que no sabe absolutamente nada del Dr. Smith, no la

entenderá igual. Ni tampoco John, que sólo sabe del Dr. Smith que es la persona que nació en el Castillo de Balmoral el 25 de diciembre de 1898 —un hecho que desconoce Matthew. Así, mientras Mark tiene respecto a Brian Smith el mismo pensamiento que Matthew, John tiene uno diferente, y Luke no tiene absolutamente ninguno.

Frege dice que dos personas en la situación en que se encuentran Matthew y John no hablan el mismo lenguaje con respecto a un nombre propio tal como «Brian Smith». Aunque al utilizar ese nombre los dos se refieren de hecho al mismo hombre, no saben que lo están haciendo así. De aquí que uno y otro asocien sentidos diferentes a la proposición «Brian Smith fue herido». John podría aceptar como verdadera la proposición de Matthew «Brian Smith fue herido» aunque no creyera que *su* Brian Smith estaba en absoluto herido.

La conclusión que Frege extrae de este complicado ejemplo es:

> Según esto, en un nombre propio tiene importancia el modo como se da a través de él el objeto designado. Esto puede suceder de diferentes maneras, y a cada una de tales maneras le corresponde un sentido particular de la oración que contiene un nombre propio. Los diferentes pensamientos que resultan de las mismas oraciones coinciden ciertamente en sus valores de verdad, esto es: si uno de ellos es verdadero, entonces todos son verdaderos, y si uno de ellos es falso, entonces todos son falsos. Sin embargo, ha de admitirse su diversidad (P, [pág. 66]).

Si queremos evitar dificultades de este tipo tendremos que estipular que para cada nombre propio debería haber justamente una sola manera de darse el objeto designado.

La conclusión de Frege puede ser considerada como un reestablecimiento parcial de la distinción entre sentido y referencia que ya conocemos desde «Función y Concepto». Pero Frege procede ahora a realizar una apli-

cación particular de esa distinción que lo lleva a un nuevo, y peligroso, fundamento. Tratando al pronombre en primera persona, «Yo», como un nombre propio, investiga sobre el modo de presentación asociado con él.

Todo el mundo, dice Frege, «está presente a sí mismo de una forma especial y primaria en la que no está presente a ningún otro». En consecuencia, cuando el Dr. Smith piensa que él ha sido herido, ese pensamiento descansa en esta forma primaria de darse uno a sí mismo. Solamente él puede captar el sentido de este pensamiento, puesto que sólo él es quien puede representarse a sí mismo en esta forma tan especial.

> Pero no puede comunicar un pensamiento que sólo él puede captar. Por consiguiente, si él dice ahora «Yo he sido herido», tiene que usar el «Yo» en un sentido que pueda ser captado por los demás, más o menos en el sentido de «Aquel que en este momento les habla», con lo cual se sirve de las circunstancias que acompañan a su emisión para la expresión del pensamiento (P, [pág. 66]).

Así pues, el pensamiento que el Dr. Smith comunica a los demás es bastante diferente del que él mismo posee.

Frege llega aquí a una conclusión que contradice a una de sus propias tesis centrales. A lo largo de su vida, en su lucha por sentar la distinción entre psicología y lógica, había venido insistiendo en que aunque las imágenes mentales pudieran ser privadas, los pensamientos eran propiedad común de todos nosotros. De acuerdo con sus propios principios, un pensamiento acerca de un ego privado que fuera incomunicable no sería en absoluto un pensamiento. Pero en lugar de rechazar la entera noción del ego cartesiano, se aventura a presentar en términos fuertemente cartesianos una inequívoca doctrina de dos mundos, uno exterior y público, y otro interior y privado.

Las cosas perceptibles del mundo físico nos son accesibles a todos: cada uno de nosotros puede ver las mis-

mas casas y tocar los mismos árboles. Pero junto al mundo exterior, dice Frege, hay un mundo interno de sensoimpresiones, imágenes y sentimientos, de deseos y anhelos. Para los fines que aquí nos importan, llamemos «representaciones» a todos esos elementos. Frege establece cuatro tesis relativas a las representaciones.

(1) Las representaciones son imperceptibles. Tú no puedes ver mis impresiones visuales: ni tampoco puedo yo, porque no son cosas que yo vea, sino cosas que yo tengo.

(2) Las representaciones pertenecen a alguien. Las ranas en el campo existen con independencia de que yo las mire o no; pero no podría haber un dolor, una disposición o un deseo vagando por el mundo si no hubiera nadie que sufriera, estuviera dispuesto a, o deseara algo.

(3) Las representaciones necesitan un poseedor. Mucho de lo que Frege dice respecto a este punto parece ser simplemente un reforzamiento de lo que ya planteó en el punto 2. Si hay algo nuevo que añadir, parece consistir en esto: que pertenecer a una conciencia particular no es justamente una propiedad que esté asociada a una representación independientemente identificable, sino que se trata de algo que es esencial a la identidad de la representación misma. Una representación no es simplemente como un átomo que no pudiera existir aislado y tuviera que darse en conjunción con alguna molécula, aunque pudiera ser identificable como elemento integrante de varias y diferentes moléculas. (Esta posibilidad queda quizá abierta en la segunda de las tesis.)

> Es imposible comparar mi impresión sensorial con la de otro cualquiera. Para ello habría de exigirse que se unieran en una sola conciencia una impresión sensorial que perteneciese a una conciencia y una impresión sensorial que perteneciese a una conciencia distinta. Ahora

> bien, aun si fuera posible hacer desaparecer una representación de una conciencia y al mismo tiempo surgir en una conciencia distinta, con todo, quedaría sin responder la pregunta de si se trataba de la misma representación. El ser contenido de mi conciencia pertenece de tal manera a la esencia de cada una de mis representaciones que toda representación de algún otro, justamente en tanto que tal, es diferente de las mías (P, [pág. 67]).

Es imposible para los seres humanos comparar las representaciones propias con las de otro. Me paseo junto a un fresal. Cojo una fresa y la sostengo entre mis dedos. Mi compañero y yo vemos la misma fresa; pero según Frege cada uno de nosotros tiene una representación diferente. Y esto conduce a su cuarta tesis.

(4) Toda representación tiene solamente un portador; no hay dos personas que tengan la misma representación.

Tras haber delineado con estas tesis las características del mundo de las representaciones, Frege vuelve a reafirmar su constante convicción de que los pensamientos no son representaciones. Al igual que yo, otras personas pueden admitir el teorema de Pitágoras. Pero no se puede decir de los pensamientos, como se puede decir de las representaciones, que cada pensamiento requiere un portador, y que el pensamiento pertenece a la conciencia de ese portador y a ninguna otra. Si ése fuera el caso, no existiría una cosa tal como la ciencia; solamente mi ciencia, y tu ciencia, y la ciencia separada de Tom, Dick y Harry. Así, hemos de reconocer que los pensamientos no pertenecen ni al reino de lo interior ni al de lo exterior.

«Un tercer reino», concluye Frege, «tiene que ser admitido». Los habitantes de este reino comparten con las representaciones la propiedad de ser imperceptibles por los sentidos, y con los objetos físicos la propiedad de ser

independientes de un portador. El teorema de Pitágoras es atemporalmente verdadero y no necesita ningún portador; no comenzó a ser verdadero en el momento en que se lo descubrió o demostró por vez primera (P, [página 69]). Así como yo no creo un árbol por el simple expediente de mirarlo, tampoco genero un pensamiento por el mero hecho de pensar; y menos aún el cerebro segrega pensamientos como el hígado segrega bilis (NS, pág. 149).

Al igual que yo, otras personas pueden captar pensamientos: no somos portadores de nuestros pensamientos como lo somos de nuestras representaciones. No *tenemos* pensamientos de la misma manera que tenemos representaciones; ni *percibimos* pensamientos tal como vemos estrellas. Los pensamientos son lo que nosotros *captamos*. Lo que es captado está ya ahí, y todo lo que nosotros hacemos es tomar posesión de él. Por supuesto, si un pensamiento es captado, tendrá que haber alguien que lo capte; pero la persona que lo capta es la portadora del pensar solamente, no del pensamiento. Sin duda alguna, cuando un pensador capta un pensamiento, hay algo en la conciencia del pensador que se orienta al pensamiento —tal vez una imagen mental de una proposición que expresa ese pensamiento. Pero esto no debe ser confundido con el pensamiento mismo. Captar un pensamiento es bastante diferente de crear un pensamiento. Y nuevamente, la verdad de un pensamiento es bastante diferente de mi aceptación de su verdad.

> El trabajo de la ciencia no consiste en un crear, sino en un descubrir pensamientos verdaderos. El astrónomo puede aplicar una verdad matemática al investigar eventos acaecidos con mucha anterioridad y que tuvieron lugar cuando, al menos en la tierra, nadie había reconocido aún esa verdad. Y puede hacerlo así porque el ser verdadero de un pensamiento es atemporal. Por lo tanto, esa verdad no se pudo haber originado solamente con su descubrimiento (P, [pág. 76]).

Podemos tomar posesión de los pensamientos, y esto podría parecer que va en contra de su atemporalidad, pero el pensamiento no queda alterado porque se actúe sobre él, del mismo modo que la luna no resulta afectada por el hecho de que tengamos o no tengamos noticia de ella (NS, pág. 150).

Los pensamientos, aunque objetivos y no subjetivos como las representaciones, no son activos de la manera causal en que lo son los objetos en el mundo físico. En este mundo, una cosa que actúa sobre otra y la cambia, es a su vez accionada y transformada. No ocurre así en el mundo atemporal en el que habita el teorema de Pitágoras.

Pero ¿no es el pensamiento de que el árbol está cubierto de hojas verdes un pensamiento que va a ser falso dentro de seis meses, y ello probaría que hay cambio en el mundo de los pensamientos? No, dice Frege. La proposición «Este árbol está cubierto de hojas verdes» puede tornarse en una proposición falsa; pero lo que esto muestra es, a lo sumo, que el pensamiento expresado por la proposición puede cambiar. En realidad, a la oración le falta una especificación de tiempo, y por lo tanto no acierta a especificar un pensamiento.

> Solamente una oración con la determinación temporal incluida y completa en todos sus aspectos expresa un pensamiento. Pero ese pensamiento, cuando es verdadero, no lo es sólo hoy o mañana, sino atemporalmente verdadero (P, [pág. 76]).

Lo que es eterno e inmutable no puede actuar sobre nosotros ni ser actuado por nosotros. Aunque nuestra captación de un pensamiento es, por supuesto, algo que se da en el tiempo. Esta captación es inesencial para el pensamiento mismo, pero tiene importancia para nosotros y para el mundo en que vivimos. El captar el teorema de Pitágoras y juzgar que es verdadero puede llevarme a tomar una decisión que produzca la aceleración de

ciertas masas. Frege termina su ensayo sobre el pensamiento con uno de sus mayestáticos pasajes:

> Los grandes acontecimientos de la historia universal, ¿podrían haberse realizado de otro modo que por la comunicación de pensamientos? Y con todo, nos sentimos inclinados a considerar los pensamientos como no actuales, puesto que parecen ser inactivos en los procesos, mientras que el pensar, juzgar, expresar, comprender, todo hacer, en suma, es asunto propio de los hombres. ¡Cuán completamente diferente aparece la actualidad de un martillo comparada con la de un pensamiento! ¡Cuán diferente es el proceso de entregar un martillo al de comunicar un pensamiento! El martillo pasa de estar en poder de uno a estar en poder de otro, es agarrado, experimenta una presión. Con ello, su densidad, la disposición de sus partes, se modifica localmente. Nada de esto sucede en el caso de un pensamiento. Al ser comunicado, el pensamiento no abandona los dominios del que lo comunica, puesto que, en el fondo, el hombre no tiene ningún poder sobre él. El pensamiento, al ser captado, provoca sólo, en principio, cambios en el mundo interior del que lo capta, pero el núcleo de su esencia permanece intacto, puesto que los cambios que experimenta solamente atañen a las propiedades inesenciales. Falta aquí algo que reconocemos por todas partes en la naturaleza: la acción recíproca. Los pensamientos no son completamente inactuales, pero su actualidad es de un género completamente diferente de la de las cosas. Y su actuar es provocado por una acción del que piensa: sin ella serían inactivos, al menos hasta donde podemos ver. Y, sin embargo, el que piensa no los crea, sino que debe tomarlos como son. Pueden ser verdaderos sin ser captados por alguien que piensa e, incluso así, no son completamente inactuales, al menos si pueden ser captados y, de este modo, puestos en acción (P, [pág. 77]).

«El Pensamiento» contiene una de las raras y prolongadas incursiones de Frege en el campo de la epistemología o teoría del conocimiento. Cualquiera que manten-

ga, como hizo Frege en este ensayo, que nuestra vida mental transcurre dentro de un mundo interior privado tiene que enfrentarse en un momento u otro a la cuestión: ¿Qué razón hay para creer que exista una cosa tal como un mundo exterior? En sus *Meditaciones*, Descartes utiliza argumentos escépticos para purificar temporalmente al lector de la creencia en algo más allá del mundo de las ideas; luego se ocupa de restaurar la fe del lector en el mundo externo mediante el recurso a la veracidad de Dios. En este ensayo, Frege acepta la distinción cartesiana entre materia (el mundo de las cosas) y mente (el mundo de las representaciones). Al igual que Descartes, acepta la necesidad de dar una respuesta al idealismo escéptico, la tesis de que nada existe excepto las ideas.

Pero ¿qué sucedería si todo fuese solamente un sueño, [...] solamente una obra de teatro representada en el escenario de mi conciencia? (P, [pág. 69]). Me veo paseando por un campo verde con un compañero; pero quizá el mundo de las cosas está vacío y yo sólo tengo representaciones cuyo portador soy yo mismo. Si es mi representación el único objeto de mi conciencia, entonces, por lo que a mi saber respecta, no hay ningún campo verde (pues un campo no es una representación, y además no hay representaciones verdes), ni tampoco un compañero (pues los seres humanos no son representaciones). Para todo lo que yo sé, no hay ni siquiera representaciones fuera de las que yo poseo (pues no puedo saber de ningún otro que las tenga). ¿Puedo incluso acariciar la hipótesis de que haya representaciones distintas de las mías? Hasta cuando pienso que hay una representación de la que yo no soy portador, ¿no la convierto con ello en objeto de mi pensar y la transformo, por tanto, en representación mía?

Frege concluye:

> O es falsa la proposición de que sólo lo que es representación mía puede ser objeto de mi contemplación, o todo mi saber y conocer se restringen al ámbito

> de mis representaciones, al escenario de mi conciencia. En este caso yo sólo tendría un mundo interior y no sabría nada de las demás personas (P, [pág. 70]).

La ciencia no ofrece salida a este dilema; por el contrario, puede conducir a un escepticismo reforzado. Un psicólogo podrá explicar cómo depende la conciencia de las fibras nerviosas y de las células ganglionares, cómo la impresión visual de un árbol es producida por rayos de luz que al refractarse en el ojo y tocar las terminaciones nerviosas visuales desencadenan los procesos del sistema nervioso. Pues bien, suponiendo que los nervios visuales han sido apropiadamente estimulados —sea por luz refractada, o por medios eléctricos—, será producida la idea del árbol tanto si existe como si no existe el árbol. Por otra parte, la estimulación del nervio visual no es algo que esté dado; es una hipótesis. Por todo lo que sabemos, la impresión visual es susceptible de ser causada mediante diversos medios.

> Si llamamos representación a lo que ocurre en nuestra conciencia, entonces lo que nosotros experimentamos de hecho son representaciones, no sus causas. Y si el científico quiere evitar toda mera hipótesis, entonces sólo le quedan las representaciones: todo se disuelve en representaciones, incluso los rayos de luz, las fibras nerviosas y las células ganglionares de las que él había partido (P, [pág. 71]).

De seguir este curso de razonamiento escéptico, no parece que me quede nada excepto yo y mi conciencia. Pero ¿realmente me experimento a mí mismo como cosa distinta de mis representaciones? ¿Tal vez no soy yo mismo más que una representación?

> Es como si estuviera tendido en un sofá, como si viera las puntas de un par de botas lustradas, la parte de arriba de unos pantalones, un chaleco, botones, parte de una chaqueta, en particular las mangas, dos ma-

> nos, algunos pelos de barba, el perfil borroso de una nariz. Y esa completa reunión de impresiones visuales, ese conglomerado de representaciones, ¿es lo que soy yo mismo? (P, [pág. 71]).

Si es así, si lo que llamo «yo» es una representación, ¿en qué se diferencia de otras representaciones, como, por ejemplo, de la que tengo de la silla que está frente a mí? Pero ¿qué derecho me asiste a seleccionar una de mis representaciones y constituirla en portadora de las otras? ¿Por qué hay que tener un portador de representaciones en absoluto? Un portador tendría que ser algo esencialmente distinto de las representaciones que él guarda; mas si todo es una representación, entonces no hay portador alguno de representaciones.

Con esto llegamos a un callejón sin salida. Si no hay ningún portador de representaciones, entonces tampoco hay representaciones; la dependencia de un portador era una de las características por las que la noción de «representación» fue introducida. No puede haber experiencia sin alguien que experimente, o un dolor sin alguien que lo sienta. El dolor es necesariamente *sentido*, y lo que es sentido tiene que tener alguien que lo sienta. Si esto es así, entonces *hay* algo que no es una representación mía, y que sin embargo puede ser objeto de mi pensamiento, a saber: yo mismo.

Al igual que Descartes, Frege prosigue este curso de razonamiento hasta desembocar en un *cogito, ergo sum:* Yo tengo representaciones, por tanto yo existo. En uno y otro caso, el primer objeto no ideal cuya existencia es establecida es el yo, el portador de representaciones, la sustancia en la que las *cogitationes* inhieren. Pero, así como hay una similaridad, hay también una diferencia entre ambos filósofos. Frege distingue entre tener una representación y captar un pensamiento, mientras que en la terminología de Descartes yo podría registrar cualquiera de estas dos actividades con el verbo «*cogito*». Para Frege, la significación de la indubitabilidad del yo no se

apoya tanto en el hecho de que éste suministre un sujeto no ideal que se ocupe de mi pensar, sino más bien en que me proporciona un objeto no ideal sobre el cual yo puedo pensar. Y esto refuta la tesis de que sólo lo que pertenece al contenido de mi conciencia puede ser objeto de mi pensamiento.

Cuando establezco algo acerca de mí mismo, mi juicio se aplica a algo que no es una idea. Además, mi juicio no necesita estar basado en una idea; por ejemplo, cuando afirmo que en este momento no siento dolor. (Frege utiliza proposiciones sobre la *ausencia* de dolor para refutar el idealismo respecto a la conciencia, tal como había usado proposiciones sobre el número cero para refutar el empirismo en matemática.)

Si puedo pensar sobre mí mismo, puedo pensar sobre los otros también. Puedo construir proposiciones sobre mi hermano que no son proposiciones sobre mi representación de mi hermano. Si puedo pensar sobre otras personas, puedo pensar sobre las representaciones de otras personas. Dos médicos pueden discutir sobre el dolor de uno de sus pacientes. Ninguno de ellos *tiene* el dolor, sino sólo el paciente. Pero para los dos, el dolor que ellos no tienen es un objeto común de pensamiento. Pueden, ciertamente, tener una representación del dolor del paciente, es decir, alguna imagen que asocian con el pensamiento del dolor. Tal representación es sin duda parte de las conciencias de los doctores; pero no es el objeto de su reflexión o lo que ellos están tratando de eliminar. La imagen, dice Frege, es simplemente una ayuda para la reflexión, como pueda serlo un dibujo (P, [pág. 73]).

El pensamiento sobre cosas de las que uno no es el portador es esencial para contar con un entorno. Pero, diría el idealista escéptico, ¿no puede ser esto un error? ¿No puedo yo estar equivocado al pensar que mi hermano es un objeto de pensamiento independiente de mi representación? Con seguridad, responde Frege, cometemos errores. «Con el paso que doy para ganarme un en-

torno, me estoy exponiendo a mí mismo al riesgo de error.» Podemos obtener certeza sobre nuestro mundo interior, pero sólo una gran probabilidad de ella respecto al mundo exterior. Que esa probabilidad es efectivamente muy alta viene mostrado por la existencia de la historia, de la filosofía moral, de la religión y de las ciencias.

Esta respuesta final al idealista escéptico sorprenderá al lector por su debilidad extrema. Al reconocer que toda proposición sobre el mundo no es nada más que probable, Frege está concediendo demasiado al escéptico; al recurrir a la validez de la religión y la ciencia, le está pidiendo concesiones que no tiene derecho a demandar. La respuesta fregeana al escepticismo cartesiano no convence más que la del propio Descartes, a la que se parece más de lo que a primera vista puede parecer. Habiendo aceptado ambos filósofos una división entre un mundo público de cosas físicas y un mundo privado de la conciencia humana, buscan reunir lo que ellos han separado recurriendo a un tercer mundo: la mente divina en el caso de Descartes, y el mundo de los pensamientos objetivos en el caso de Frege.

En uno y otro caso, el error fatal estuvo en la aceptación de la dicotomía inicial. No hay dos mundos, sino uno solo, al que pertenecen tanto los objetos físicos inertes como la conciencia, el pensar, los seres humanos. Frege estaba equivocado, y pecó contra su propio principio cardinal de separar los pensamientos de las representaciones al aceptar que la conciencia nos proporciona contenidos incomunicables y certidumbres que no pueden ser compartidas. Como Wittgenstein iba a demostrar más tarde, la identificación de incluso el más privado de los elementos de la conciencia depende de manera esencial de conceptos que han sido desarrollados para su uso en el solo y único mundo público en el que nos comunicamos mediante un lenguaje compartido.

CAPÍTULO XI

Investigaciones lógicas, II

El ensayo «La Negación» de 1919 parte de la observación hecha en «El Pensamiento» de que el pensamiento contenido en una oración interrogativa es el mismo que el expresado por la oración asertórica que responde a esa cuestión. Así, para Frege, la oración «¿Invadió César la Gran Bretaña?» tiene el mismo sentido que «César invadió la Gran Bretaña» y contiene el mismo pensamiento.

La respuesta correcta a la pregunta en este ejemplo es «Sí». Pero supóngase que la pregunta bajo nuestra consideración tuviese un «No» por respuesta correcta, como en «¿Invadió César Irlanda?». En este caso el pensamiento expresado por la oración interrogativa y por la asertórica es falso en ambos casos. ¿Cómo es posible esto? Si los pensamientos fueran entidades subjetivas al igual que las ideas, no habría el menor problema respecto a la existencia de pensamientos falsos. Pero un pensamiento es para Frege algo objetivo que los individuos captan pero no crean. ¿Cómo puede haber entonces pensamientos falsos? Si los pensamientos son objetivos, es natural pensar que el ser de un pensamiento está en su ser verdadero. En tal caso, la expresión «pensamiento falso» es equivalente a «pensamiento no-existente»; y no nos estaría permitido decir «Que tres es mayor que cinco es fal-

so», pues el sujeto gramatical de esta proposición sería vacío. De manera similar, «¿Es tres mayor que cinco?» no tendría sentido alguno.

En el caso de esta última cuestión vemos inmediatamente que la respuesta es no. Pero, ¿qué sucede con la pregunta

$$\text{Es } (21/20)^{100} \text{ mayor que } \sqrt[10]{(10^{21})}?$$

En este caso, que la cuestión tenga o no sentido depende al parecer de su respuesta, que tiene que ser calculada primero. Pero seguramente tiene que ser posible captar el sentido de una pregunta antes de responderla, pues en otro caso no sería posible en absoluto respuesta alguna. O, abordando el asunto desde la otra dirección, si la verdad fuera parte del contenido de una proposición interrogativa, entonces en el momento de captar el sentido de la proposición podría verse que era verdadera. Plantear una pregunta equivaldría a responderla. Por tanto debemos abandonar la creencia de que el ser de un pensamiento consiste en su ser verdadero. Existen cosas tales como pensamientos falsos.

> Estos pensamientos, que quizá más tarde resulten falsos, tienen su justificación en la ciencia y no pueden ser tratados como si no tuviesen ser. Piénsese en una demostración indirecta. Aquí el conocimiento de la verdad se alcanza justamente mediante la captación de un pensamiento falso. El profesor dice: «Supongamos que *a* no es igual a *b*.» Un principiante piensa enseguida: «¡Qué sinsentido! ¡Pero si yo estoy viendo que *a* es igual a *b*!» Está confundiendo la carencia de sentido por parte de una oración con la falsedad del pensamiento expresado en ella (N, [pág. 145]*).

* Para el criterio de paginación de los ensayos de filosofía de la lógica tratados en este capítulo, véase la primera nota de la página de abreviaturas en las referencias a las obras de Frege que figura al principio de este libro *[N. del T.]*.

Lo que hace el profesor del ejemplo de Frege es proceder a extraer las consecuencias de la suposición falsa, y de mostrar que conducen a una contradicción. Luego, por *reductio ad absurdum*, concluirá que la suposición inicial era falsa, y que *a* es ciertamente igual a *b*.

A lo largo de su vida, por no se sabe qué razón, Frege insistió en que de un pensamiento falso nada podría ser inferido. Y aquí sigue manteniendo esta doctrina, mas ahora añade que un pensamiento falso puede ser parte de un pensamiento verdadero, desde el cual la inferencia es posible. Pero para eso exige que las proposiciones falsas aparezcan en las pruebas únicamente como elementos no aseverados de proposiciones compuestas aseveradas. El profesor no debería pues decir, «Supongamos que *a* no es igual a *b*, entonces se sigue que *p* y no *p*, por tanto *a* es igual a *b*»; sino más bien, «Si *a* no es igual a *b*, entonces *p* y no *p*; pero no es cierto que (*p* y no *p*), por tanto *a* es igual a *b*». De hecho, dado un sistema apropiado de reglas, la prueba indirecta puede ser desarrollada con igual legitimidad en una y otra forma. En casos complicados, el método fregeano produce pruebas que son excesivamente complicadas. Para Frege, el asunto no era meramente una cuestión de elección entre diferentes formalismos, sino un punto esencial en la filosofía de la lógica. En esto se equivocaba al parecer. No hay nada erróneo en decir que las inferencias de un pensador eran impecables, pero que sus premisas eran falsas.

El método preferido por Frege envuelve el uso regular del procedimiento de contraposición, esto es, inferir de una proposición de la forma «si *p* entonces *q*» una proposición de la forma «si no *q* entonces no *p*». Este procedimiento ha sido en cualquier caso muy familiar a los lógicos durante siglos. Frege observa que todo el que admita la legitimidad de esta transición, tiene que aceptar que los pensamientos falsos tienen entidad. En caso contrario, si *p* y *q* son ambas verdaderas, entonces la conclusión de la inferencia es enteramente vacua; y si sólo una de ellas es verdadera, entonces a cada una de

las proposiciones involucradas en la inferencia les faltará o un antecedente o un consecuente[1].

En lugar de decir que el ser de un pensamiento consiste en su ser verdadero, deberíamos decir que reside en la posibilidad de que diferentes pensadores lo capten como uno y el mismo pensamiento. En este sentido, debemos admitir también que los pensamientos falsos tienen entidad. De otro modo sería imposible, entre otras cosas, que un equipo de investigadores estableciera nunca un resultado negativo. Una vez que la investigación hubiera establecido, por ejemplo, que la tuberculosis bovina no era transmisible a los humanos, la verdadera hipótesis bajo investigación, «La tuberculosis bovina es transmisible a los humanos» se revelaría como carente de significado común para cada uno de los investigadores.

El tribunal con jurado presupone que cada uno de los miembros de ese jurado entienden el asunto que se debate de la misma manera. En el curso de un juicio puede ocurrir que se les diga, con verdad, a los integrantes del jurado que «Si el acusado estaba en Roma en el tiempo material del delito, no cometió el asesinato». Supóngase que es falso que el acusado estaba en Roma. Entonces, de acuerdo con la tesis de que los pensamientos falsos no tienen sentido públicamente captable, tendríamos que decir que cada miembro del jurado podría captar el mismo pensamiento en la proposición completa, y sin embargo asociar con la cláusula condicional *si* su propio sentido privado.

Los pensamientos falsos, concluye Frege, son indispensables. Y por encima de todo son indispensables en conexión con la negación.

> Tiene que ser posible negar un pensamiento falso, y para poder hacerlo necesito ese pensamiento. No pue-

[1] La exposición fregeana de este simple punto (N, [pág. 146]) es confusa e incompleta; es posible que falte algún pasaje en el texto impreso.

> do negar lo que no es. Y lo que necesito de mí como portador no puedo transformarlo mediante la negación en algo de lo cual yo no soy portador y que puede ser captado como el mismo pensamiento por varias personas (N, [pág. 147]).

De acuerdo con una tradición lógica largamente establecida, la negación envuelve cierta forma de división. En la terminología de la escolástica medieval, por ejemplo, «composición» y «división» eran casi sinónimos de «afirmación» y «negación». Frege se pregunta: ¿Debe ser considerada la negación de un pensamiento como una disolución de ese pensamiento en sus partes componentes?

Esta posibilidad tiene que ser claramente contemplada para que pueda ser rechazada. Nuestro acto de juicio no puede alterar la composición de un pensamiento. El acto de juzgar no crea un pensamiento o pone en orden sus partes, ni tampoco puede otro acto de juzgar romper la interconexión de las partes (N, [pág. 151]). El veredicto negativo de un jurado no disuelve el pensamiento expresado por la acusación en meros fragmentos de pensamiento. Insertar un «no» en una proposición verdadera no la convierte en expresión de un no-pensamiento. La proposición resultante puede ser usada con toda justificación como cláusula de un condicional. De la misma manera, insertar un «no» en una proposición falsa no produce el efecto de convertir un no-pensamiento en un pensamiento.

Cuando negamos una proposición, insertamos un «no» en algún lugar apropiado, o le anteponemos la expresión «No es el caso que...», dejando la proposición en todo lo demás intacta, con su orden original inalterado. Cosa que es bastante diferente de desmantelar la proposición cortándola, por ejemplo, en tantos trocitos como palabras tenga que luego pudieran barajarse o ser dispersados por el viento. Similarmente, la negación de un pensamiento es algo muy diferente de la separación o disolución de sus elementos.

Esto resulta particularmente claro en el caso de la doble negación. De la proposición

La Schneekoppe es más alta que el Brocken

se obtiene por simple negación

La Schneekoppe no es más alta que el Brocken.

Una doble negación da

No es verdadero que la Schneekoppe no es más alta que el Brocken.

Si la negación fuera disolución, entonces tras la primera negación sólo nos quedarían fragmentos de un pensamiento.

> En tal caso tendríamos que suponer que la segunda negación podría ensamblar de nuevo esos fragmentos. Así pues, la negación se parecería a una espada que pudiera volver a hacer cicatrizar los miembros que ha cortado. Pero esto requeriría el mayor de los cuidados. Las partes del pensamiento han perdido completamente toda conexión y relación mediante la primera negación. Así, mediante una aplicación poco cuidadosa de la virtud cicatrizadora de la negación, podría obtenerse fácilmente la oración: «El Brocken es más alto que la Schneekoppe» (N, [pág. 149]).

¿Cuáles son por otra parte los objetos que la negación se supone que separa? No son partes de proposiciones, ni tampoco partes de pensamientos. ¿Son cosas del mundo? Las cosas del mundo no se cuidan de nuestras negaciones. ¿Son, entonces, imágenes mentales? De serlo, la negación sería un acto privado, diferente para cada uno de nosotros; no habría posibilidad de veredictos comunes de no culpabilidad. «Resulta así imposible establecer qué es lo que realmente es disuelto, dividido, o separado por el acto de negación.»

Tomás de Aquino, que era bien consciente del problema suscitado por Frege, pero que también utilizó la terminología de «composición» y «división», dio la siguiente respuesta a la cuestión: ¿Qué es lo que queda dividido en un juicio negativo?

> Si consideramos las cosas tal y como se dan en la mente, siempre se da una composición, que implica verdad y falsedad; un fenómeno que no se daría en la mente o intelecto si no fuera porque éste [al juzgar] compara o compone un concepto simple con otro concepto simple. Pero si consideramos las cosas tal y como se dan en la realidad, entonces unas veces se habla de *compositio* y otras de *divisio*.
>
> Se habla de *compositio* cuando la mente pone una idea junto a otra como una manera de captar la reunión o identidad de las cosas representadas por estas ideas; se habla de *divisio* cuando la mente pone una idea junto a otra como un modo de captar que las cosas son diversas[2].

Todo lo cual, una vez traducido a términos del sistema de Frege, puede ser considerado como equivalente a decir que las cosas que se reúnen en un juicio afirmativo, y se separan en uno negativo, son el pensamiento y lo Verdadero.

Pero en estos últimos ensayos, Frege no introduce los objetos lo Verdadero y lo Falso[3], aunque repite, como tantas veces antes, que el término «verdadero» es indefinible. Por otra parte, a diferencia de Santo Tomás, Frege

---

[2] *In Aristotelis Libros Peri Hermeneias* (eds. Fr. Raymundi - M. Spiazzi), Turín, Marietti, 1955, I, 3, pág. 26.

[3] Ciertamente, parece que en este ensayo considera a las proposiciones no como nombres de valores veritativos, sino como nombres de pensamientos. Escribe Frege (N, [pág. 156]): «El artículo determinado "*la*" en la expresión "*la* negación del pensamiento de que 3 es mayor que 5" muestra que esta expresión se propone designar una determinada cosa singular. Esa cosa singular es aquí un pensamiento. El artículo determinado convierte a toda la expresión en un nombre singular, algo que hace las funciones de un nombre propio.»

no siente la necesidad de reservar espacio para los juicios negativos o actos de negación. Para él, no hay necesidad de introducir la negación como un polo opuesto a la aserción. Las negaciones forman parte del pensamiento afirmado, y negar la proposición *p* es simplemente afirmar no *p*. La idea de un acto de negación como polo opuesto al acto de juzgar es un intento de fundir en uno solo el acto de juzgar y la negación, que es un componente de un pensamiento. Es a este último a lo que corresponde, en el lenguaje ordinario, la palabra «no» como parte del predicado (N, [pág. 152]).

Si tuviéramos que admitir la negación como el polo opuesto, o un tipo especial, de la aserción nos veríamos en dificultades para dar razón de algunas formas bastante simples de inferencia. Para acomodarlas tendríamos que complicar nuestras reglas de inferencia de manera intolerable. Considérese el argumento:

> Si el acusado no estaba en Berlín el día del asesinato, entonces no cometió el asesinato.
>
> Ahora bien, el acusado no estaba en Berlín el día del asesinato.
>
> Por lo tanto, no cometió el asesinato.

Si consideramos como una aserción cada una de las premisas y la conclusión, entonces la inferencia es una instancia del conocido *modus ponens*. Pero si vamos a tratar la negación como perteneciente al acto de juzgar más que como un componente del contenido de un juicio, entonces tenemos que considerar que el argumento está construido de la siguiente manera:

> Afirmado: Si no *p* entonces no *q*.
> Negado: *p*.
> Por tanto: Negado: *q*.

Ahora bien, no tenemos aquí la aserción de un condicional que unido a la aserción de su antecedente lleva a

la aserción de su consecuente; lo que tenemos en cambio es la aserción de un condicional seguido por la negación de una proposición que difiere del antecedente del condicional, y esta aserción y esta negación llevan a la negación de una proposición que difiere del consecuente del condicional. Para legitimar inferencias de este tipo, y de otros similares, tendríamos que construir un conjunto de reglas intolerablemente complicado. Es preferible con mucho aceptar que la negación es parte del pensamiento aseverado y tratar la negación simplemente como la aserción de la negación de un pensamiento. Todo pensamiento tiene un pensamiento contradictorio, y aceptamos la falsedad de un pensamiento asintiendo a la verdad de su contradictorio.

Mas decir que la negación es parte del pensamiento aseverado no quiere decir que haya pensamientos positivos y negativos.

> Considérense las oraciones «Cristo es inmortal», «Cristo tiene vida eterna», «Cristo no es inmortal», «Cristo es mortal», «Cristo no tiene vida eterna». ¿Cuál de los pensamientos que tenemos aquí es positivo y cuál es negativo? (N, [pág. 150]).

Dado que el signo de negación va estrechamente unido al predicado en el lenguaje ordinario, puede parecer que lo que se niega no es un pensamiento completo, sino una parte de ese pensamiento. Esta tentación es ya manifiesta en una proposición como «Sócrates no es justo»; y aún más fuertemente en «Sócrates es injusto». Pero Frege insiste en que en tales casos, por la combinación de un símbolo negativo con una parte de la oración, lo que negamos es el contenido de la oración entera.

Según Frege, lo que es negado tiene que ser algo capaz de ser una proposición completa. Pero, por supuesto, al negarlo se convierte en parte de un todo mayor. «No es el caso que *p*» está formado por «*p*» y el signo de negación.

> El pensamiento no necesita de ningún complemento para su existencia; es completo en sí. Por el contrario, la negación necesita ser completada por un pensamiento. Las dos partes integrantes, si se quiere usar esa expresión, son de géneros completamente distintos y contribuyen de una manera completamente distinta a la formación del todo. Una de ellas completa; la otra es completada. (N, [pág. 155]).

Los lectores de las anteriores obras fregeanas no tardarán en darse cuenta de que lo que Frege está haciendo aquí es establecer, sin recurrir a su terminología formal, que la negación es una función, y, en cuanto tal, insaturada. (En un posterior ensayo, «Composición de pensamientos», Frege se refiere a la negación como la parte insaturada de un pensamiento.) La negación es por supuesto una función veritativa; la más elemental de tales funciones.

«Para hacer perceptible en el lenguaje la necesidad de complementación, puede escribirse 'la negación de...'. Donde el hueco existente después del 'de' indica dónde se ha de introducir la complementación, puesto que al complementar en el reino del pensamiento y sus partes le corresponde algo similar en el reino de las oraciones y sus partes» (IL, pág. 108). En estas palabras podemos reconocer el eco de la teoría fregeana de las funciones lingüísticas enunciada en la *Conceptografía*.

El uso de la negación como función que pueda ser aplicada a algo que ya de por sí es un valor es poco frecuente. La doble negación (como en «No es el caso que no es el caso que *p*) puede ser considerada o bien como el resultado de tomar «*p*» como argumento de la función «No es el caso que no es el caso que...», o como el de tomar «no es el caso que *p*» como argumento de la función «No es el caso que...». En correspondencia con estos dos distintos modos de estructurar la proposición, hay dos modos de considerar la estructura del pensamiento expresado por ella.

Frege compara la función con una prenda de vestir.

Una chaqueta no puede mantenerse erguida por sí misma, sino que necesita alguien que la lleve. El hombre que lleva una chaqueta puede ponerse además un abrigo. Podemos decir o que el hombre que vestía una prenda lleva ahora una segunda prenda, o que el hombre va vestido con una chaqueta más un abrigo. Uno y otro modo de considerar el asunto, dice Frege, están igualmente justificados. Y concluye con la observación de que el hecho de revestir a un pensamiento con una doble negación no altera su valor de verdad.

En el último de estos tres ensayos, «Composición de pensamientos», Frege pasa de la negación a las restantes funciones veritativas elementales. En este escrito registra seis tipos diferentes de lo que él llama «composición de pensamientos».

La conjunción, al igual que la negación, es considerada por Frege como algo que se aplica a oraciones no aseveradas; si afirmamos «*p* y *q*», esta oración tiene que ser considerada como una única aserción de una proposición compuesta, no como un par de aserciones unidas por la conjunción «y».

En su explicación veritativo-funcional de «y», Frege ofrece un pasaje que ilumina su concepción, en el periodo final de su vida, de la relación entre funciones lingüísticas (signos insaturados) y lo que corresponde a esas funciones en el ámbito del sentido.

> La «y» determinada así de manera más precisa por lo que respecta a su manera de uso, parece doblemente insaturado. Exige, para su saturación, una oración que lo preceda y una oración que lo siga. También lo que corresponde a «y» en el reino del sentido tiene que ser doblemente insaturado; en tanto que es saturado por medio de pensamientos, los combina. Como mera cosa la letra «y» no es, desde luego, más insaturada que cualquier otra cosa. Se la puede llamar insaturada con respecto a su manera de uso como símbolo que ha de expresar un sentido, puesto que aquí sólo puede tener

> el sentido que se le quiere dar cuando se coloca entre dos oraciones. Su finalidad como signo reclama una complementación por medio de una oración que la preceda y otra que la siga. En rigor, la insaturación ocurre en la región del sentido, y de allí es transferida al signo (CP, [pág. 39]).

Este pasaje es importante por poner en relación la insaturación de un símbolo con la finalidad o uso de tal símbolo. La noción de insaturación ha sido transportada de la región de la metafísica al área del uso lingüístico.

Frege dice que «*B* y *A*» tienen el mismo sentido que «*A* y *B*». En el lenguaje ordinario parece haber una gran diferencia entre

> Condujo su coche hasta casa y se bebió medio litro de vodka

y

> Se bebió medio litro de vodka y condujo su coche hasta casa,

pero Frege está tratando la conjunción «y» como una conectiva veritativo-funcional, de suerte que «*p* y *q*» es verdadera si y sólo si «*p*» es verdadera y «*q*» es verdadera. Pero sin la menor duda diría que la indicación de secuencia temporal en las anteriores proposiciones es algo que es sugerido más bien que establecido, o que pertenece al «colorido» de los pensamientos, como la diferencia entre «y» y «pero».

Los cinco tipos de pensamientos compuestos enumerados por Frege en adición a «*A* y *B*» son como sigue:

> II. no (*A* y *B*); III. (no *A*) y (no *B*);
> IV. no ((no *A*) y (no *B*)); V. (no *A*) y *B*;
> VI. no ((no *A*) y *B*).

No hay necesidad de seguir en detalle la exposición de cada uno de estos tipos de pensamientos, con sus evidentes condiciones de verdad. El tercero es equivalente a «Ni *A* ni *B*», y el cuarto a «*A* o *B*», entendido en sentido no exclusivo, es decir, no descartando la posibilidad de que tanto *A* como *B* sean ambos verdaderos. Un compuesto del sexto tipo, que es falso si y solamente si el primer componente es verdadero y el segundo falso, es equivalente a «si *B* entonces *A*», entendido en función de su verdad.

Para otros tipos de pensamientos, Frege repite las observaciones que ya hizo respecto a la insaturabilidad de la conjunción. En «ni *A* ni *B*», la conectiva es la que da todo el sentido de la expresión, aparte de la letras «*A*» y «*B*». Los dos huecos en

«ni ... ni ...»

indican la doble insaturación de esta expresión, que se corresponde con la doble insaturación de la conectiva.

Frege llama la atención sobre el hecho de que la interpretación veritativo-funcional de las conectivas, aunque esencial para fines científicos, conduce a resultados incoherentes en el lenguaje ordinario. Por ejemplo, las siguientes proposiciones resultan ser verdaderas:

> Federico el Grande ganó la batalla de Rossbach, o dos es mayor que tres.
>
> Si tengo un gallo que hoy ha puesto huevos, entonces la catedral de Colonia se derrumbará mañana por la mañana.

En la conversación de la vida diaria esperamos que el sentido de dos proposiciones conectadas por «o» o por «si» tenga una conexión con una y otra; pero en la explicación que Frege da de las conectivas no se requiere tal conexión. Respecto a la segunda proposición dice Frege:

> Agólpanse aquí toda clase de cosas, por ejemplo, la relación de causa y efecto, la intención con la que el hablante emite una oración de la forma «Si *A* entonces *B*», la base sobre la cual se tiene por verdadero su contenido. El hablante da, quizás, pistas respecto a aquellas preguntas que surgen entre los oyentes. Tales pistas pertenecen al ramaje que, en el lenguaje ordinario, adorna a menudo los pensamientos. Mi tarea aquí es separar lo accesorio, y aíslo como núcleo lógico una composición de dos pensamientos, una composición que he denominado composición hipotética de pensamientos (CP, [pág. 46]).

Las diversas funciones veritativas posibles de dos argumentos están construidas en la «Composición de Pensamientos» partiendo de la negación y la conjunción como símbolos primitivos. En esto difiere del sistema de la *Conceptografía*, en donde se tomaba como primitivo al condicional veritativo-funcional en lugar de la conjunción. Frege alude a esta posibilidad al final del ensayo. Algunos de los compuestos parecen ser psicológicamente más naturales que otros, pero lógicamente están todos al mismo nivel. Así, podríamos partir de un enunciado que contuviese «si» y «no», «Si *B* entonces no *A*»; y si negamos esto, obtenemos «No (si *B* entonces no *A*)»; lo cual es equivalente a «*A* y *B*». Los otros seis pensamientos compuestos pueden ser todos derivados de modo similar a partir de los compuestos hipotéticos y la negación.

Frege deja abierta la cuestión de si hay otras composiciones de pensamientos en cuya formación se haya seguido un criterio distinto al veritativo-funcional. La física, la química y la astronomía, conjetura Frege, tal vez puedan parecerse a la matemática; pero las cláusulas del tipo «a fin de que» aconsejan prudencia y parecen requerir más investigación.

El ensayo acaba con la aserción de que sólo los tipos de composición de pensamientos necesitados para la matemática serán pensamientos compuestos a base de

conjunción y negación de la manera explicada. Todos los pensamientos matemáticos están construidos por tanto con criterio veritativo-funcional. Si un componente de un pensamiento matemático compuesto es reemplazado por otro pensamiento que tenga el mismo valor de verdad, el pensamiento compuesto resultante tiene el mismo valor veritativo que el original.

Esta tesis estaría entrañada por la inicial tesis logicista de Frege, pero puede ser verdadera con independencia de ésta, puesto que aquí se deja abierta la cuestión de si las proposiciones primitivas, de las cuales están compuestas las proposiciones matemáticas, son conocidas por una especial intuición matemática o son verdades básicas de la lógica.

La «Composición de Pensamientos» fue el último escrito publicado por Frege; sólo le quedaban dos años más de vida. Su proyecto de presentar de una manera informal y filosófica el sistema lógico que había desarrollado en la *Conceptografía* y en las subsiguientes obras, no llegó a completarse. De haber continuado, el próximo capítulo habría explicado sin duda, para un público no matemático, la operación de los cuantificadores y el alcance del cálculo de predicados. Significó una gran pérdida que su autor no viviera para hacerlo y nos privara con ello de sus últimos pensamientos sobre la mayor de sus contribuciones a la lógica.

CAPÍTULO XII

La hazaña de Frege

Frege comparó con frecuencia al matemático con el geógrafo que explora nuevos continentes. Su propia carrera como pensador se asemeja a la aventura exploratoria de Cristóbal Colón. Así como Colón fracasó en su proyecto de descubrir un camino a la India por el lado oeste, y sin saberlo enriqueció a Europa con el conocimiento de todo un nuevo continente, del mismo modo Frege fracasó en su tarea de derivar la aritmética de la lógica, pero realizó descubrimientos en lógica y avances en filosofía que cambiaron de manera permanente el mapa entero de ambas disciplinas. Al igual que Colón, tampoco Frege supo apreciar el verdadero valor de sus propios y genuinos descubrimientos, y el más profundo desánimo y depresión hicieron presa en él en consecuencia.

Frege dedicó los mejores años de su vida a probar la continuidad entre aritmética y lógica. Todas las otras innovaciones de su fértil mente habían sido ideadas para servir a este supremo propósito, y cuando el proyecto se derrumbó era natural que se sintiera tentado a pensar que la obra de su vida había sido un fracaso.

Ahora sabemos que el programa logicista no puede ser llevado nunca a buen término. El paso de los axiomas de la lógica a los teorema de la aritmética está blo-

queado en dos puntos. En primer lugar, como el propio Frege aprendió de su fracasado intento de superar la paradoja de Russell, la teoría ingenua de conjuntos, que formaba parte de la base del sistema lógico, era en sí misma irremediablemente inconsistente. Por tanto, los axiomas de la aritmética no podrían ser derivados de axiomas puramente lógicos del modo que él había esperado. En segundo lugar, la noción misma de «axiomas de la aritmética» fue puesta en cuestión tras la muerte de Frege cuando el lógico austriaco Kurt Gödel mostró que era imposible dar una axiomatización de la aritmética que fuera consistente y completa.

Sin embargo, los cálculos, conceptos e intuiciones desarrollados por Frege en el curso de la exposición de su tesis logicista, tienen un interés tan definitivo que resisten con ventajas la comparación con el fracaso de ese programa. Frege mostró una formidable perspicacia respecto a la perdurabilidad de los elementos en su obra lógica en una entrada a su diario en agosto de 1906 —en lo que debió haber sido el clímax de su depresión por el desastre que acompañó a las *Grundgesetze*— titulada «¿Qué puedo considerar como resultado de mi trabajo?». Vale la pena reproducir la nota entera.

> Casi todo está ligado a la conceptografía; el concepto concebido como función; la relación como función de dos argumentos; la extensión del concepto o clase no es para mí lo primero; la insaturación tanto en el concepto como en la función; el reconocimiento de la esencia del concepto y de la función.
>
> Pero antes hubiera yo debido, en rigor, mencionar la barra del juicio, la disociación de la fuerza asertórica respecto del predicado...
>
> composición proposicional hipotética...
>
> generalidad...
>
> sentido y referencia... (NS, pág. 200).

Todos los puntos aquí mencionados, o bien han pasado hace tiempo a formar parte del patrimonio común

de los lógicos, o bien son tópicos del debate filosófico contemporáneo en el que los escritos de Frege siguen siendo de importancia capital.

Podemos pasar a examinar por turno la contribución de Frege como lógico, como filósofo de la lógica y como filósofo de la matemática. Frege llevaba razón al anotar la conceptografía como la primera de sus inexpugnables hazañas. Su librito de 1879 marcó una época sin paralelo en la historia de la lógica. En el espacio de apenas cien páginas presentó el primer sistema global de las principales áreas de la lógica. El cálculo de proposiciones (al que Frege alude en su nota con la expresión «modo hipotético de composición de proposiciones») y el cálculo de funciones (el tratamiento de la «generalidad») contenidos en la *Conceptografía* ocupan un lugar permanente en el corazón de la moderna lógica. En palabras de dos ilustres historiadores de la lógica, «no es en absoluto exagerado decir que el uso de cuantificadores para ligar variables fue una de las más grandes invenciones intelectuales del siglo XIX»[1].

Si Aristóteles fue el fundador de la lógica, Frege la volvió a fundar; y en el periodo que va desde su tiempo hasta el día de hoy, la lógica ha avanzado más rápida y profundamente de lo que lo hizo durante todas las centurias que separaron a Frege de Aristóteles. Es cierto que los filósofos, matemáticos y científicos de la información que comparten un curso elemental de lógica tendrán, en sus investigaciones lógicas, poco más en común que un psicólogo y un físico cuántico que hayan compartido en curso elemental de estadística; pero el fundamento primario sobre el cual se va a construir toda su obra será el cálculo ideado por Frege. La invención de la lógica matemática fue sin duda una de las mayores contribuciones al desarrollo de muchas disciplinas cuyos resultados desembocaron en la invención de los compu-

---

[1] W. y M. Kneale, *El desarrollo de la lógica*, Madrid, Tecnos, 1972, pág. 472.

tadores. De este modo, la obra de Frege como lógico sigue ejerciendo hoy sus efectos sobre las vidas de multitud de personas anónimas diseminadas por todo el mundo.

Junto al cálculo proposicional y funcional, Frege desarrolló, como hemos visto, en el curso de su obra otras ramas de la lógica, entre las que se incluyen el cálculo de predicados de segundo orden y una versión de la teoría ingenua de conjuntos. Su influencia en lógica ha ido mucho más allá de las áreas que él mismo había cultivado sistemáticamente. En estas áreas, su influencia ha sido transmitida principalmente a través de los gruesos volúmenes de los *Principa Mathematica* de Russell y Whitehead (pese a que esta obra carece de algún modo de la filosófica claridad que distingue a los escritos fregeanos). A partir de entonces, el progreso en las áreas de lógica que Frege estudió ha sido enorme: entre los primeros y significativos desarrollos se encuentran la puesta a punto de métodos no axiomáticos para manipular el cálculo proposicional y funcional, y el establecimiento de una semántica formal que cumpla las exigencias de rigor que Frege había introducido en la sintaxis formal.

Frege no exploró las áreas de lógica conocidas como lógica modal (esa parte de la lógica que se ocupa de las cuestiones de necesidad, posibilidad y nociones afines), o lógica temporal (la lógica de enunciados en los que los tiempos verbales son significativos). Estas ramas de la lógica, cultivadas en la Edad Media, han sido nuevamente estudiadas en nuestro siglo a la luz de las innovaciones de Frege. Su propia agenda predominantemente matemática lo retrata como figura comparativamente poco interesada en áreas de la lógica que se ocupan de inferencias sobre lo transeunte y cambiante.

La nota del diario de Frege citada enumera cuatro de sus resultados en filosofía de la lógica. Tres de ellos —la disociación de la fuerza asertórica respecto a la predicación, el tratamiento de los conceptos como funciones, y

el de las relaciones como funciones de dos argumentos— son logros sólidos y duraderos, aunque los filósofos contemporáneos no están más seguros de lo que lo estaba el propio Frege sobre el modo de presentar en términos no metafóricos el punto de vista que subyace al expediente de llamar «insaturada» a una función. El cuarto logro, la distinción entre sentido y referencia, es el antepasado de las actuales teorías del significado, según las cuales el sentido de una palabra es la contribución que aporta para determinar el valor de verdad de las proposiciones en las que ella ocurre. Todos estos resultados, seleccionados por Frege en su nota, son ciertamente avances de peso en filosofía de la lógica.

Sin embargo, el más importante e irreversible logro de Frege no figura en su lista: la separación de la lógica de la psicología y de la epistemología. La tradición cartesiana había colocado a la epistemología a la cabeza de la filosofía; la tradición empirista había confundido el estudio de la lógica con una investigación de los procesos mentales humanos. Frege liberó a la lógica de ataduras psicológicas, y la colocó en el lugar rector de la filosofía que hasta entonces había sido ocupado por la epistemología. Es este hecho, más que ningún otro, el que justifica que Frege sea considerado el padre fundador de la moderna filosofía analítica.

Michael Dummett ha escrito lo que sigue:

> Lo que distingue a la filosofía analítica, en sus diversas manifestaciones, de otras escuelas es, en primer lugar, la creencia en que puede lograrse una explicación filosófica del pensamiento mediante una indagación filosófica del lenguaje; y, en segundo, que sólo así es posible llegar a una explicación integral del primero[2].

Si la filosofía analítica nació, por tanto, cuando se dio el «giro lingüístico», su fecha de nacimiento debe remon-

[2] M. Dummett, *Origins of Analytical Philosophy*, pág. 4.

tarse a la de la publicación de *Los fundamentos de la aritmética* en 1884, cuando Frege decidió que el camino para investigar la naturaleza del número residía en analizar las oraciones que contenían numerales.

En la enumeración de sus resultados, Frege no menciona su trabajo como filósofo de la matemática. Ello no es sorprendente si se tiene en cuenta que cuando escribió su diario esa filosofía parecía estar en ruinas. Es cierto, por otra parte, que la filosofía de la matemática de Frege ha envejecido de un modo que está ausente en su filosofía de la lógica. Sin embargo, los historiadores de la filosofía coinciden en considerar a Frege como el más grande filósofo de la matemática que jamás haya existido.

Lo cual no es tan paradójico como parece a primera vista. La medida de la grandeza de Frege como filósofo de la matemática está en que su obra dejó completamente anticuado todo lo que previamente había sido escrito. Nadie puede tomar ahora en serio la obra de incluso el más grande de los escritores anteriores a Frege sobre la materia. La propia explicación fregeana de la naturaleza del número adolecía, como él mismo reconocía, de un trágico defecto; pero nadie a partir de entonces podría escribir una palabra sobre este tópico sin apoyarse como punto de partida en sus trabajos.

La obra de Frege en lógica filosófica no carecía completamente de antecedentes. Muchas de sus intuiciones —tal como la distinción entre aserción y predicación— fueron muy bien detectadas por los filósofos escolásticos, aunque habían quedado oscurecidas con el paso del tiempo. Su teoría de que las funciones son la referencia de los predicados se asemeja en más de un respecto a la explicación de la predicación en términos de formas individualizadas de Tomás de Aquino. Al distinguir la lógica de la psicología se alineaba con una tradición cuyo origen está en el *De Interpretatione* de Aristóteles; y, desde luego, cuando hizo de la lógica, en lugar de la epistemología, la disciplina fundacional de la filosofía, la

reinstaló en el lugar que había ocupado durante la Edad Media.

Durante la mayor parte de su vida, Frege dio prioridad a la lógica simplemente porque ignoraba la epistemología. Sólo en su época final, después de escribir la nota de su diario que hemos reproducido más arriba, fue cuando dirigió directamente su atención hacia cuestiones epistemológicas. Como hemos visto, sus esfuerzos en este campo no lograron clarificar los problemas que venían acuciando a los epistemólogos. Su recurso a un triple mundo de experiencia, pensamiento y física era un callejón sin salida. Mientras rechazaba la subjetividad del pensamiento, aceptaba sin embargo acríticamente la concepción cartesiana de la subjetividad de la experiencia, considerando a las sensaciones e imágenes como experiencias esencialmente privadas e incomunicables.

En las décadas que siguieron al ensayo de Frege «El Pensamiento», desarrolló Wittgenstein una serie de argumentos encaminados a mostrar que la identificación de incluso el más privado de los elementos de la conciencia, es esencialmente dependiente de conceptos que han sido elaborados para uso en un mundo público, en el cual nos comunicamos mediante un lenguaje que todos compartimos. Su obra puede ser considerada, en un sentido, como una extensión de la campaña de Frege contra el psicologismo. Concordando con Frege en que los pensamientos son propiedad común, Wittgenstein continuaba mostrando, contra Frege, que ni siquiera las ideas son privadas en el sentido de ser incomunicables.

Todo el que haya sabido apreciar la fuerza del famoso argumento de Wittgenstein contra los lenguajes privados, considerará fundamentalmente defectuosa a la epistemología fregeana. Ciertamente, parece probable que las tesis de la última obra de Frege suministraran gran parte del blanco de los ataques wittgensteinianos. Pero también es cierto que los logros de Wittgenstein son en parte debidos a la obra de Frege. El cartesianismo prevalente en los tiempos de Frege envolvía una concepción errónea tanto de

los pensamientos como de las ideas. Frege expuso los errores cartesianos acerca del pensamiento, pero retuvo, y expresó en una manera particularmente cándida, los errores cartesianos acerca de las ideas. Es como si el residual veneno cartesiano que corría por el interior de los sistemas filosóficos de sus días fuera recolectado por Frege en este ensayo y transformado en una virulenta ponzoña lista para ser diseminada por Wittgenstein.

La deuda que a lo largo de su vida mantuvo Wittgenstein con Frege fue enorme. En su primer libro, el *Tractatus Logico-Philosophicus*, reconoce honestamente lo mucho que le debe a «la gran obra de Frege». Incluso en sus últimos escritos póstumamente publicados, que socavaban algunas de las más apreciadas doctrinas de Frege, Wittgenstein permaneció fuertemente influido por los temas y las estructuras de pensamiento fregeanos.

Una de las deudas que Wittgenstein explícitamente reconoció fue su estilo. «El estilo de mis sentencias», escribió, «está extraordinariamente influido por Frege. Y de proponérmelo, podría señalar esta influencia donde nadie podría detectarla a primera vista»[3]. El dominio del estilo no era ciertamente el menor de los extraordinarios talentos de Frege como filósofo. *Los fundamentos de la aritmética* en particular es una de las grandes obras maestras filosóficas de todos los tiempos: original, lúcida, vigorosa, ponderada, ingeniosa, sutil y profunda. Todas estas cualidades están raramente combinadas en las obras de incluso los más grandes pensadores, y como estilista filosófico, Frege ha sido superado sólo por Platón y Descartes. Al igual que ellos, y por encima de todos los otros filósofos, poseía el don de escribir una prosa que es accesible y atractiva a la primera lectura, pero cuya relectura devuelve dividendos durante toda la vida.

---

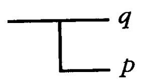
[3] L. Wittgenstein, *Zettel*, trad. Octavio Castro y Ulises Moulines, México, UNAM, 1979.

APÉNDICE I

La notación simbólica de Frege

La notación simbólica de Frege, introducida por primera vez en la *Conceptografía* y utilizada, con ligeras modificaciones, en los *Grundgesetze der Arithmetik* no se usa ahora. En su lugar, la mayoría de los lógicos han elegido el sistema ideado por Peano en 1894 y adoptado por Russell y Whitehead en sus *Principia Mathematica* de 1910. Hay diversas variantes de este sistema, una de las cuales es la que se adopta en el presente libro.

Las fórmulas del sistema de Frege no están escritas a la manera lineal del sistema de Peano, sino en forma bidimensional. Ello es debido a que el símbolo para el condicional veritativo-funcional correspondiente a «$p \rightarrow q$», que es básico para la construcción de sus fórmulas, tiene la siguiente forma:

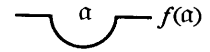


Así, el primero de los axiomas de Frege presenta esta forma:



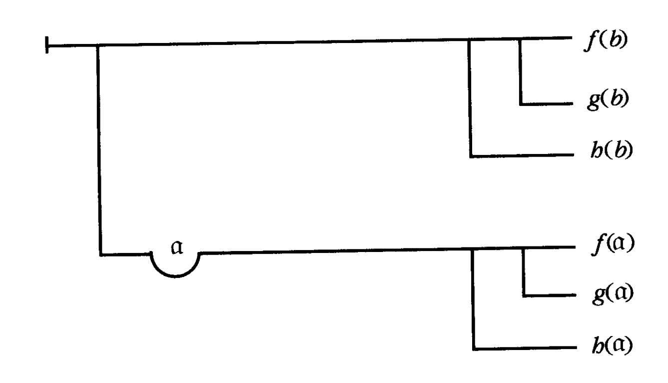
que se leería como «si *p*, entonces si *q* entonces *p*». Frege utiliza las letras itálicas del alfabeto tanto para nombres ficticios como para variables proposicionales, o, como él diría, para indicar indeterminadamente tanto individuos como valores veritativos. (Lo cual está sin duda conectado en su última obra con su tesis de que una proposición hace referencia a un valor de verdad del mismo modo que un nombre propio hace referencia a un individuo.) Ahora es habitual recurrir a las letras iniciales del alfabeto para representar nombres y utilizar las letras «*p*», «*q*», «*r*»... como variables proposicionales.

Para simbolizar el cuantificador universal, Frege utiliza una letra gótica sobre una concavidad en la línea horizontal que representa la barra del contenido. De este modo, lo que ahora escribimos como $(x)f(x)$ era escrito por Frege como:



Las variables ligadas están representadas por letras góticas y las variables libres por itálicas, bajo la convención de que el alcance de una variable libre es la totalidad de la proposición en la que ésta ocurre.

El aspecto de las fórmulas impresas puede ser observado en la siguiente fórmula aislada, una de cuyas instancias en lenguaje ordinario podría ser: Si todas las mujeres son necias si son ricas, entonces Cleopatra es necia si es una mujer rica.



Las letras griegas no forman parte del sistema básico de Frege, aunque se sirve de letras minúsculas griegas para dos propósitos: (i) como parte de definiciones abreviativas; y (ii) para indicar el lugar del argumento en una función, como en ξ *es mayor que 0*. Las letras mayúsculas griegas son usadas para hablar *acerca del* sistema, como por ejemplo al establecer sus reglas, del siguiente modo:

«A partir de dos enunciados “⊢┬ Γ └ Δ” y ⊢— Δ” podemos derivar el enunciado “⊢— Γ”».

APÉNDICE II

Nota sobre la traducción*

En la lista que sigue aparecen las versiones de los términos técnicos alemanes de Frege. Cuando no las acompaña ningún comentario, la traducción se ha ajustado a la habitualmente usada por los traductores y comentaristas. En caso de existir más de un término equivalente, he añadido una nota para justificar cualquier preferencia.

anerkennen, «aceptar». Este término es el equivalente mental del acto lingüístico de afirmar. La mayoría de los traductores la vierten como «reconocer», lo cual no es muy acertado, puesto que «reconocer» es un verbo de éxito —uno sólo puede reconocer lo que es verdadero— mientras que en Frege es claro que, desgraciadamente, uno puede *anerkennen*, en la medida en que puede afirmarla, una falsedad.

Anzahl, «número». Esta palabra, que debería ser traducida literalmente como «número cardinal», es la más usualmente utilizada por Frege en la mayoría de los pasajes de los *Fundamentos* y de los *Grundgesetze* para

* Algunas líneas de este apéndice han sido omitidas o ligeramente reajustadas por no afectar, o no afectar bien a la versión española de los términos alemanes de Frege *[N. del T.]*.

hablar de números —esto es, de los enteros no negativos que dan respuesta a la pregunta «¿cuántos?» (FA, página 118, nota 7). A veces usa la palabra «Zahl» como sinónima; en un pasaje de los *Grundgesetze* recurre al contraste «Zahl»/«Anzahl» para distinguir entre enteros positivos y números reales. No he seguido el criterio de Austin y Furth de usar «Número» para «Anzahl» y «número» para «Zahl».

ausdrücken, «expresar».

Aussage, «enunciado». «Aserción» es también posible, pero he procurado evitarla para impedir la confusión con el acto de afirmar.

bedeuten, «significar», «representar», «referirse a».

Bedeutung, «referencia». Con anterioridad a *Función y concepto*, la palabra es usada con el sentido general de «significado» o «significación», y así la he traducido. Una vez introducida como término técnico en contraste con *Sentido*, he usado «referencia», prefiriéndola a «significado», que induce a confusión, y a «denotación», que es mucho menos común en la literatura general sobre este tópico.

Begriff, «concepto».

begriffliche Inhalt, «contenido conceptual».

Begriffsschrift, «conceptografía». He usado este término (prefiriéndolo a «ideografía» o a «notación conceptual») como término genérico y como título de la obra de Frege.

Behauptung, «aserción».

Gedanke, «pensamiento».

Gegenstand, «objeto».

gleich, esta palabra alemana puede significar «idéntico», «igual» o «semejante». A veces, el texto fregeano resulta más convincente traduciéndola por «idéntico» y otras por «semejante». De hecho, puesto que Frege pensaba que dos cosas no idénticas no podían ser totalmente semejantes, la ambigüedad no es importante. Véase pág. 96.

Gleichheit, «identidad», «ecuación».

gleichzahlig, «equivalente». La palabra está acuñada por Frege, y su significado está dado en su explicación

(véanse págs. 18-19). Otros traductores utilizan «igualmente-enumerado», que es demasiado literal, «igual», que no es lo bastante técnico, o «equinumeroso», que es demasiado extravagante.

Inhalt, «contenido».

Merkmal, «componente» (de un concepto). La traducción literal es «nota característica», pero esto choca con la explicación fregeana de que una *merkmal* es un elemento que ayuda a unificar o reunir un concepto. Una *Merkmal* es nota característica no del concepto, sino de los objetos que caen bajo él.

Satz, «proposición». En Frege, la palabra alemana significa comúnmente oración con sentido. La palabra española «proposición» puede significar esto, o también el objeto abstracto expresado por tal oración, que es lo que Frege llama un «pensamiento». En algunos de los últimos escritos de Frege, la palabra es usada de manera tal que su traducción más natural es la de «oración», y a ella me he atenido en tales casos.

Sinn, «sentido».

Umfang, «extensión».

Urteil, «juicio».

Vorstellung, «imagen». La palabra es usada frecuentemente por Kant, y en sus obras es traducida usualmente por «representación» o «idea». Frege la usa la mayoría de las veces con el significado de imagen mental. En sus últimos escritos amplía su sentido hasta incluir, por ejemplo, las impresiones sensoriales. En tal contexto la he traducido por «idea».

Wertverlauf, «curso de valor».

wirklich, «(causalmente) activo, real, efectivo». *Wirklichkeit* implica realidad, pero buscando palabras en el sentido de interacción causal, el mundo efectivo. Los números son para Frege objetivos y reales, pero no son causalmente activos o efectivos.

Índice analítico

Índice

NOTA FINAL

Le recordamos que este libro ha sido prestado gratuitamente para uso exclusivamente educacional bajo condición de ser destruido una vez leído. Si es así, destrúyalo en forma inmediata.

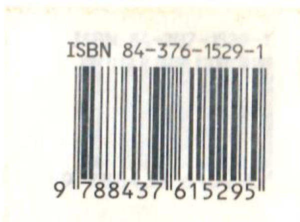
Súmese como voluntario o donante, para promover el crecimiento y la difusión de la Biblioteca



Para otras publicaciones visite
www.lecturasinegoismo.com
Referencia: 3837

UNIVERSALMENTE famoso como creador del paradigma que ha superado a la lógica de Aristóteles y como padre fundador de la filosofía analítica, Gottlob Frege, el hombre que más influyó en Russell y Wittgenstein, es sin embargo, por lo difícil e inaccesible de su obra, uno de los pensadores menos leídos en España.

Este libro pone al alcance de cualquier lector, aunque carezca de base lógica y matemática, *toda* la obra de Frege cronológica y sistemáticamente ordenada en sus múltiples etapas y facetas: su lógica elemental o conceptografía (caps. II-III); su filosofía logicista de la matemática (caps. IV-V); sus capitales aportaciones en semántica (caps. VI-VII); su axiomatización de la aritmética (caps. VIII-IX); y sus reflexiones finales sobre filosofía de la lógica (caps. X-XI). En él pueden encontrar estudiantes y profesores una provechosa introducción a la lógica, a la filosofía de la matemática y del lenguaje y a la filosofía analítica en general.


ISBN 84-376-1529-1
9 788437 615295

0111068